

線遠近法における奥行きの漸減比

篠塚 二三男

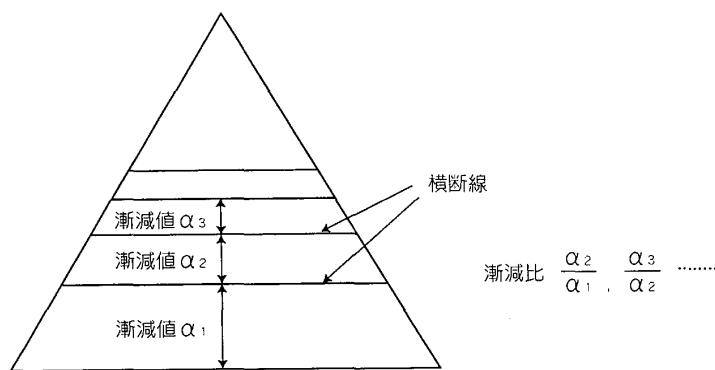
はじめに

1. 奥行きの漸減比とは

1° 遠近法とは「奥行き」に対する感覚と思考である。

3次元空間を2次元平面上に変換させる方法が遠近法であり、ルネサンス時代に確立された線遠近法は、この変換を数学的な厳密さの上に立って合理的・客観的におこなうところから「科学的」遠近法ともよばれる。この変換には平面的な「横幅」や「高さ」も含まれるが、変換のもっとも難しいのが「奥行き」の変換である。奥行きは、3次元空間の再現をもくろむ絵画空間にとっての要であり、本質であり、そのレゾン・デートルである。

線遠近法では、複数の「横断線」を規則的に配置することにより奥行きのイリュージョンをつくりだす。この横断線の間隔が順次減少して行く一定の割合を本稿では「漸減比」と呼ぶことにする。「漸減比」は隣り合う2つの間隔の比率のことであり、ひとつひとつの間隔の大きさ（幅）については「漸減値」と呼び、それらを表した図を「漸減図」と呼ぶことにする（挿図1）。



挿図1 漸減図

(注) 裾分氏(1986, p.83)はアルベルティの文章の引用のなかで「遞減」(successione di tutte le traverse quantita 全横線の量の継続)という言葉を使われ、辻氏(1996)も「遞減比」という言葉を用いられている。漸近線とか漸化式のような数学用語があるので、筆者はあえて漸減比、漸減値、漸減図という言い方を用いることにする。

2° 漸減比について筆者は早くに美術史学会例会(1978年4月15日)で線遠近法についての発表をした際に、通常の線遠近法における漸減比の一般式にふれており(例会で配布したプリント

資料を参照。後出の挿図2とその関係式に同じ)、いずれ何らかの形でまとめておきたいと思っていた問題であった。しかし本稿を書き始めた直接のきっかけは、拙稿「レオナルド・ダ・ヴィンチの素描《マギの礼拝背景図》の空間構成」(1991)での未解決問題を考えて行く過程からであった。この論文のなかで私はレオナルドの素描《マギの礼拝背景図》の遠近法が、アルベルティの線遠近法とは異なる「平行対角線遠近法」であることを示した。そしてこの素描の5つの層の幅および視距離の長さがともに公比 $\frac{11}{15}$ の等比数列になっていることを述べたが(同論文p.31の注1およびp.42の注1)、なぜそうなるのか、また一般解はどうなるのかは明らかにできなかった。また点B₅が点Qに一致するように5本の平行な対角線を引くには、どのような傾きの対角線であればよいのかも、未解決の課題として残されていた(同論文p.31の注2)。[これらの問題の解は本稿7-2°, 3°を参照]

さらにこの漸減比について再考するきっかけとなったのは片桐氏の論文(1992)の問題提起である。つまり私はレオナルドの先の素描が平行対角線遠近法という「全く新しい」遠近法を試みているのではないかと述べたのに対し(篠塚, 1991, pp.6, 46, 55), 片桐氏(1992, p.17-19)はこの作図法はアルベルティが『絵画論』で非難した方法(本稿では「 $\frac{2}{3}$ 漸減比作図法」と呼ぶことにする)に当たるのではないかと指摘された。当初私は片桐氏の説をどちらかという否定的に考えていたが、今回平行対角線遠近法の漸減比の一般解を求めた結果、 $\frac{2}{3}$ 漸減比を作図するための条件がきわめて簡単であることがわかり(挿図23a, b参照)、レオナルドの素描との親近性も十分考慮に値するように思われてきた。[また5-5°でふれるように、脱稿間近になって発見した平行対角線遠近法の作品例は、ゴシック画家の作図法とレオナルドの素描との関連を再認識させられた]

様々な遠近法における漸減比の一般式がようやく解決でき、本稿の準備を進めている段階で、辻茂氏の著書(1996)のII章までの草稿をご本人から知らされた。きわめて近似する問題を扱っていることにたいへん驚いたが、辻氏の研究は逆遠近法などを包含する遠近法全般に関わるきわめて根本的な解決であり、遠近法を厳密に考えて行く上で今後必ず参照すべき重要な指針と思われる。そして私が本稿で扱った対象は、辻氏の提示した4つの原理のうちの「第2原理」のみであることに気づかされた次第である。

したがって本稿は辻氏の著書の一部を補うあるいは補充しあうような内容になるかと思う。その意味でも、読者にはまず辻氏の著書に目を通されることを願う。また辻氏の第II章p.44~59には漸減比をめぐるアルベルティから近代の学者までの説がふれられており、こうした問題におけるガイドラインの役割を果たしている。私も一部重なる内容のものを用意していたが、不用と思われたので、本稿においては、漸減比に関するこれまでの研究史については省略させていただく。

3° 本稿はこのように片桐氏と辻氏の研究に触発される場所もあったが、基本的には私のこれまでの研究の延長線上にあるものである。あえて本稿のとりえを述べさせてもらうな

らば、平行対角線遠近法と曲面遠近法の漸減比の一般式 ($4-1^\circ$; $5-1^\circ$) が得られたことと、前述のレオナルドの素描のいくつかの問題が解けたこと ($7-2^\circ$; 3°), $\frac{2}{3}$ 漸減比を作図する簡便な方法 ($8-3^\circ$) を提示できたことである。[$5-5^\circ$ でふれるように平行対角線遠近法を適用できる作品の漸減比を知る方法が見つかったことも挙げてよかろう]

なお記号の表記はできるだけ先の拙稿(篠塚, 1991)に従ったが、あつかう問題の拡大にともない、一部で踏襲できなかつたところがある。とくにMとmのあらわすものが変わったことに注意されたい。また辻氏(1966)の用いている記号表記とも異なるものになってしまったことも許されたい。当然のことながら、記号の表記は本稿のみで完結する性格のものである。また本稿全体における表記の統一につとめたが、見落としたものもあるかもしれない。

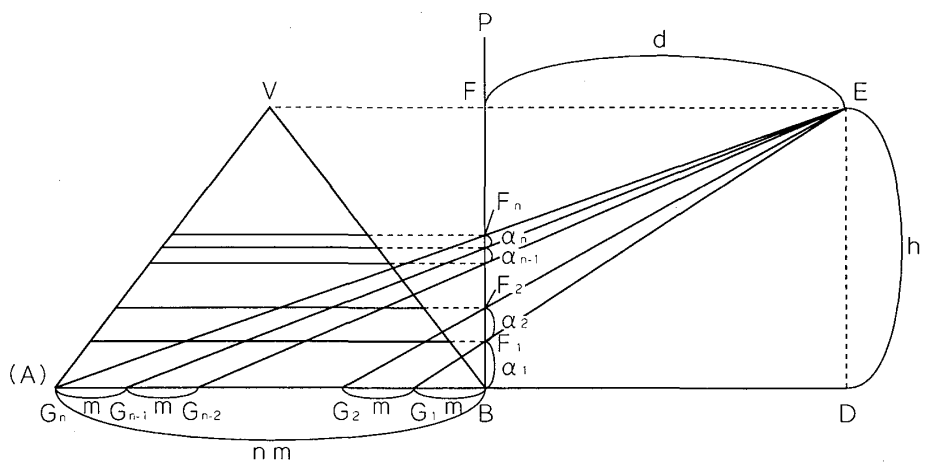
I 章 様々な遠近法における漸減比

ここではアルベルティの遠近法や距離点法のようなよく知られた通常の線遠近法だけでなく、まだ市民権を得ていない平行対角線遠近法や曲面遠近法のような特殊な遠近法も視野に入れながら、それぞれの奥行きの漸減比を数学的に明らかにし、それらの一般解を比較してみたい。

2. アルベルティの作図法における漸減比

1° 挿図2のようにEを視点、Pを画面(切断面)、Vを消失点とし、またdは視距離、hは視高、mはひとつの区画の長さであり、nは区画の数で任意の自然数、 α_n はn番目のmの画面上での大きさ(漸減値)を表すものとする。この時の漸減値 α_n および漸減比 $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ は次のような式になる。

- E : 視点
- P : 画面 (切断面)
- V : 消失点
- d : 視距離
- h : 視高
- m : ひとつの区画
の長さ
- n : 区画の数で任
意の自然数
- α_n : n 番目の m の漸減値



挿図2 アルベルティの作図法と漸減比

漸減値

$$\alpha_n = \frac{d h m}{(d + n m) \{d + (n - 1) m\}} = \frac{d (d + m) \alpha_1}{(d + n m) \{d + (n - 1) m\}}$$

$$= \frac{h (h - \alpha_1)}{\{h + (n - 1) \alpha_1\} \{h + (n - 2) \alpha_1\}}$$

漸減比

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{d + (n - 2) m}{d + n m} = \frac{h + (n - 3) \alpha_1}{h + (n - 1) \alpha_1} = \frac{1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}}{3 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}}$$

[証明]

挿図 2 において $\triangle B F_1 G_1 \sim \triangle D E G_1$ であるから

$$B F_1 : D E = G_1 B : G_1 D \quad \therefore \alpha_1 : h = m : (m + d) \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore \alpha_1 = \frac{h m}{d + m} \dots\dots\dots ②$$

同様にして $\triangle B F_n G_n \sim \triangle D E G_n$ であるから

$$B F_n : D E = G_n B : G_n D \quad \therefore (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) : h = n m : (n m + d)$$

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{h n m}{d + n m}$$

$$\therefore \alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) = \frac{h n m}{d + n m} - \frac{h (n - 1) m}{d + (n - 1) m}$$

$$= \frac{d h m}{(d + n m) \{d + (n - 1) m\}} \dots\dots\dots ③$$

①より $h = \frac{(d + m) \alpha_1}{m}$ であり、これを③に代入すると

$$\alpha_n = \frac{d (d + m) \alpha_1}{(d + n m) \{d + (n - 1) m\}}$$

同じく①より $d = \frac{m (h - \alpha_1)}{\alpha_1}$ であり、これを③に代入すると

$$\alpha_n = \frac{h (h - \alpha_1)}{\{h + (n - 1) \alpha_1\} \{h + (n - 2) \alpha_1\}}$$

さらに $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{d h m}{(d + n m) \{d + (n - 1) m\}} \div \frac{d h m}{\{d + (n - 1) m\} \{d + (n - 2) m\}}$

$$= \frac{d + (n - 2) m}{d + n m} = \frac{h + (n - 3) \alpha_1}{h + (n - 1) \alpha_1} \quad (\because d = \frac{m (h - \alpha_1)}{\alpha_1})$$

これを m について解くと $m = \frac{d (\alpha_{n-1} - \alpha_n)}{2 \alpha_{n-1} - n (\alpha_{n-1} - \alpha_n)} \dots\dots\dots ④$

また $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} = \frac{d + (n - 3) m}{d + (n - 1) m}$ となるから $m = \frac{d (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})}{3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - n (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})} \dots\dots\dots ⑤$

④=⑤から、これを α_n について解くと $\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1} (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})}{3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}}$

$$\therefore \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}}{3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}} = \frac{1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}}{3 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}} \dots\dots\dots ⑥$$

(注1) ②から $d = m \left(\frac{h}{\alpha_1} - 1 \right)$ となり、これは視距離 d を画面上の計測から求めるひとつの方法であることを示している。視距離を求める別の方法については篠塚 (1982) p.116を参照。

(注2) 漸減値 α_n の式は、辻氏 (1996, p.61-62) の第2原理の関係式と内容的に近いものであるが、何を既知の条件とするかが両者でやや異なるため、導き出された関係式も異なるものになっている。Veltman (1986) p.403が友人の Udo Jauernig の助けをかりて求めた式は、私の求めた公式で $n = 2$ とした場合の画面上の大きさ(漸減値) α_2 を求める式に当たる。つまり o を h , m を d , y を m , n を $d + m$, x を α_2 として代入してみれば、同じ式が得られる。

(注3) [射影変換を用いての証明]

線遠近法は17世紀にデザルグによって射影幾何学へと発展するが、この射影幾何学で成立する定理を用いて先ほどの漸減比を別の関係式で表すこともできる。

挿図3のように1点 S_1 から直線を何本か引いて2本の定直線 l_1, l_2 と交わらせたとき、交点同志の対応を配景対応という。このような対応を l_3, l_4, \dots, l_n と続け、中心 $S_2, S_3, S_4, \dots, S_n$ もその度に変えながら作ったとき、最初の直線 l_1 と最後の直線 l_n との対応を射影的対応または射影変換という。そして直線上の4点の定める線分の比の比を複比(非調和比, 交差比)といい、射影変換においてはこの複比が不変であることがわかっている(複比の不変性定理)。つまり次のような式が成立し、これを記号で $(A_n, B_n; C_n, D_n)$ というように表す。

$$\frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} \cdot \frac{A_1 D_1}{D_1 B_1} = \frac{A_2 C_2}{C_2 B_2} \cdot \frac{A_2 D_2}{D_2 B_2} = \dots = \frac{A_n C_n}{C_n B_n} \cdot \frac{A_n D_n}{D_n B_n}$$

$$(A_1, B_1; C_1, D_1) = (A_2, B_2; C_2, D_2) = \dots = (A_n, B_n; C_n, D_n)$$

透視投象(線遠近法)は射影変換の一種であるから、挿図4において次の式が成り立つ。

$$(A_1, C_1; B_1, D_1) = (A_2, C_2; B_2, D_2) \quad \therefore \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{D_1 C_1} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2} : \frac{A_2 D_2}{D_2 C_2}$$

点 A_1, B_1, C_1, D_1 は等間隔であるから

$$\frac{1}{1} : \frac{3}{1} = \frac{a}{b} : \frac{d}{c} \quad \therefore 3ac = bd = b(a+b+c) \quad \therefore c = \frac{b(a+b)}{3a-b}$$

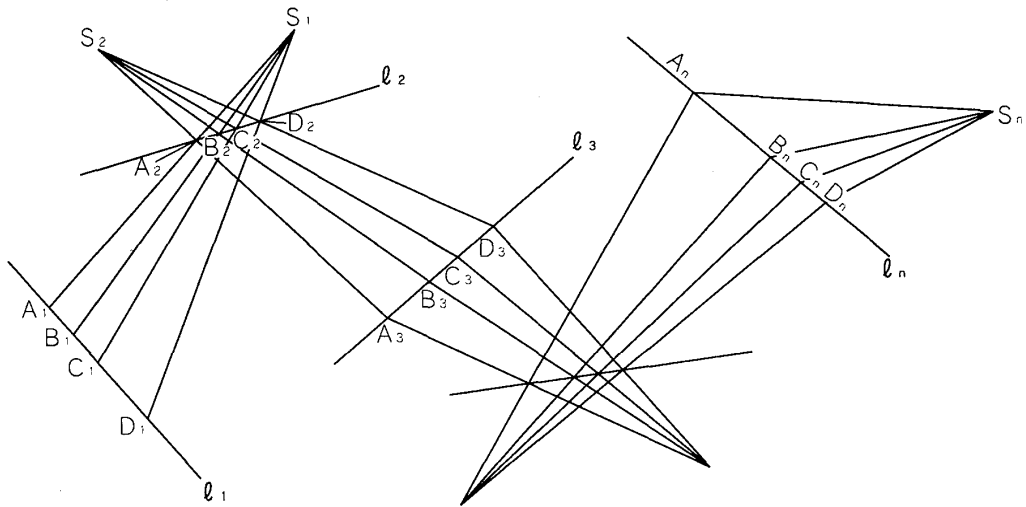
この式は1番目の幅 a と2番目の幅 b から3番目の幅 c が決定されることを示している。またこの式を変形すると次のようになる。

$$\frac{b}{c} = \frac{3a-b}{a+b} = \frac{\frac{3a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}$$

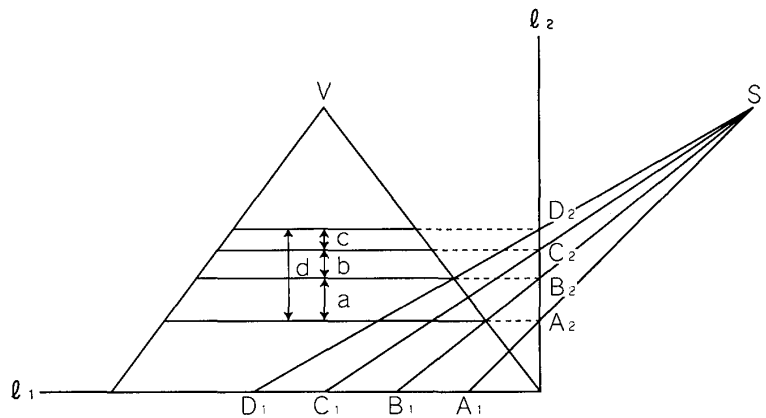
この式は Panofsky (1960/1972, p.127/邦訳 p.276) が, Dr. Raoul Bott の力をかりて求めた式(ただし求め方にはふれていない)と同じものになる。また先述の奥行き(漸減比)の式(2-1°の式⑥)も内容的に同じものである。以上の式は3つの漸減値の関係を示す一般解ではあるが、漸減値や漸減比が視距離や視高とどのような関係にあるのかを示す式ではない。

寡聞ながら、この複比の不変性定理を用いて、奥行き(漸減比)を証明した研究は見あたらないのであるが、この定理の応用範囲は広いと思われる。たとえばレオナルド・ダ・ヴィンチの《最後の晩餐》の背景に規則的に並ぶ左右4つづつの壁掛けの横幅の長さを計測し、それらの複比を求めてみると一致しな

い。そのことから壁掛けの配置が通常の線遠近法で作図されたのではないことがわかる(この点について筆者は前述の美術史学会例会でスライドを用いて指摘した)。



挿図3 射影変換



挿図4 漸減比と射影変換

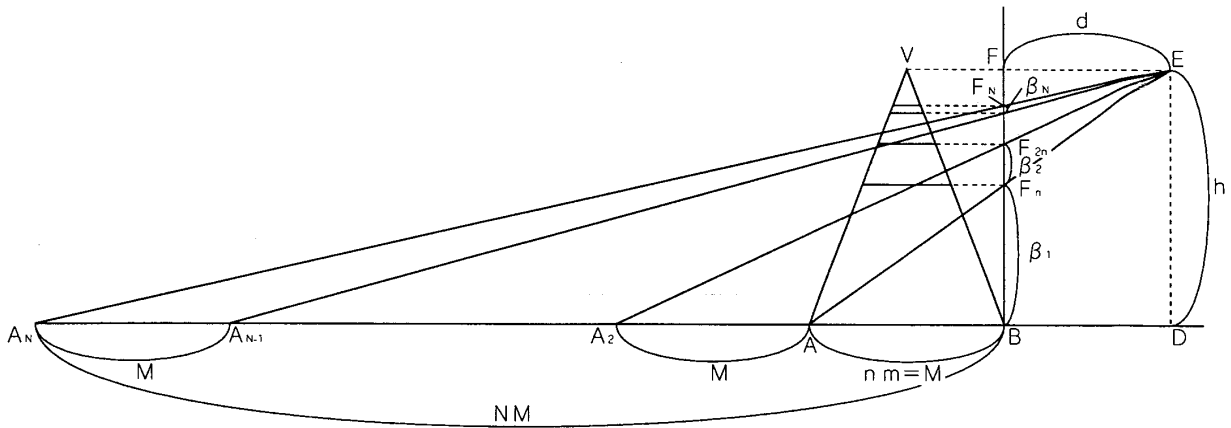
2° 作図の拡張と漸減比

先のアルベルティの作図法(挿図2)をさらに拡張し、挿図5の場合を考えてみる。挿図2において α_1 から α_n まで漸減する奥行きを全体を第1層とし、この第1層の大きさを挿図5のように β_1 で表す(つまり $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1$)。線分 AB (n 個の m の長さであり、これを M で表わす。つまり $nm = M$) は画面上では β_1 となって変換される。

AB の延長線上にある A_2A も同じ nm つまり M の長さであると、画面上では β_2 となり、第II層をつくる。同じようにして N 番目の M が画面上に変換された第 N 層の大きさを β_N とする。この時

$$\beta_N = \frac{d h M}{(d + NM) \{d + (N - 1)M\}}$$

が成立し、2-1°で述べた α_n の場合と同じ構造の式となる(つまり n を N , m を M , また α_1 を β_1 と置き換えればよい)。したがって漸減比 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}}$ も $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ と同じ構造の式となる。



挿図5 アルベルティの作図法の拡張と漸減比

[証明]

挿図5において $\triangle B F_N A_N \sim \triangle D E A_N$ であるから

$$B F_N : D E = A_N B : A_N D$$

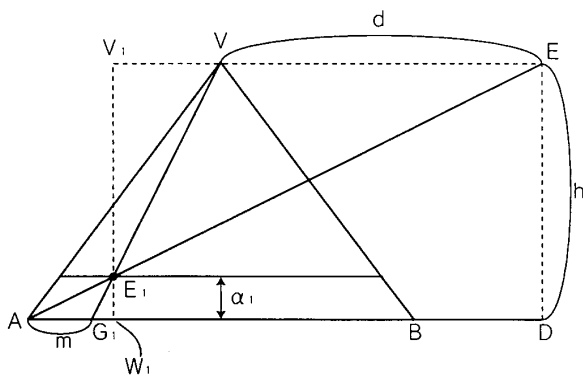
$$\therefore (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) : h = N M : (N M + d)$$

$$\therefore \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N = \frac{h N M}{d + N M}$$

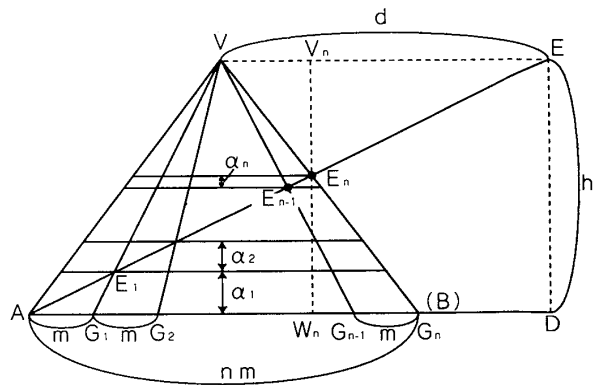
$$\therefore \beta_N = \frac{h N M}{d + N M} - \frac{h (N - 1) M}{d + (N - 1) M} = \frac{d h M}{(d + N M) \{d + (N - 1) M\}}$$

3. 距離点法における漸減比

1° 距離点法の作図の手順(挿図6a, b)は先のアルベルティの作図法(挿図2)と異なるが、得られる奥行き α の漸減値や漸減比はまったく同じである。



挿図6 a 距離点法の漸減値



挿図6 b 距離点法の漸減比

[証明]

挿図6 aにおいて $\triangle A G_1 E_1 \sim \triangle V_1 E_1$ なので、各三角形の底辺と高さの比は、

$$AG_1 : EV = W_1E_1 : V_1E_1$$

$$\therefore m : d = \alpha_1 : (h - \alpha_1) \quad \therefore \alpha_1 = \frac{hm}{d+m}$$

同様にして挿図 6 b において $\triangle AG_nE_n \sim \triangle EVE_n$ なので

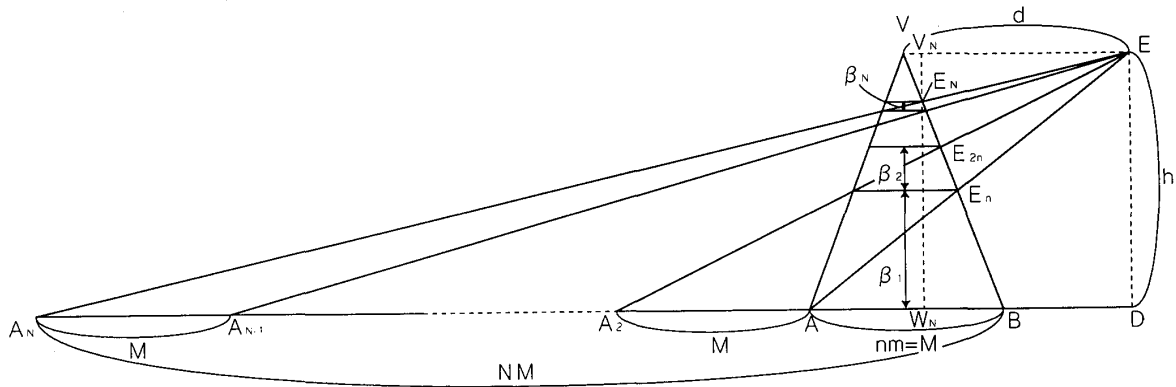
$$AG_n : EV = W_nE_n : V_nE_n$$

$$nm : d = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) : \{h - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\}$$

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{hnm}{d+nm}$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{hnm}{d+nm} - \frac{h(n-1)m}{d+(n-1)m} = \frac{dhm}{(d+nm)\{d+(n-1)m\}}$$

2° 以上の作図を拡張した場合の漸減比もアルベルティの作図法の拡張(挿図 5)と結果は同じである(挿図 7)。



挿図 7 距離点法の拡張と漸減比

[証明]

挿図 7 において $\triangle A_NB E_N \sim \triangle EVE_N$ なので、底辺と高さの比は

$$A_NB : EV = W_N E_N : V_N E_N$$

$$\therefore NM : d = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) : \{h - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N)\}$$

$$\therefore \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N = \frac{hNM}{d+NM}$$

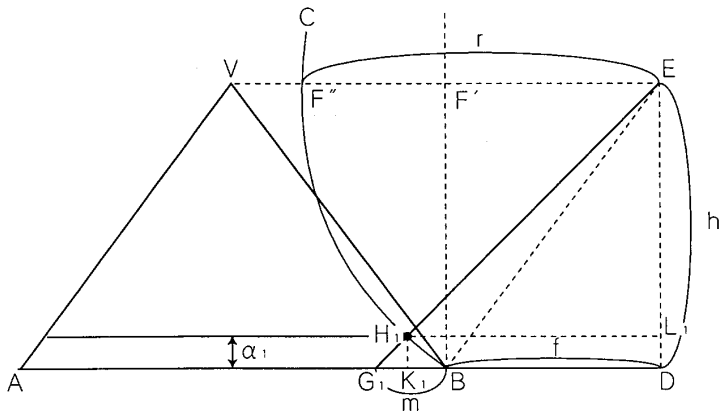
$$\therefore \beta_N = \frac{hNM}{d+NM} - \frac{h(N-1)M}{d+(N-1)M} = \frac{dhM}{(d+NM)\{d+(N-1)M\}}$$

4. 曲面遠近法における漸減比

1° ここで云う曲面遠近法とは、レオナルド・ダ・ヴィンチが手稿の中で実験的に試みている作図法のことである。しかし彼の意図がどのようなものであったのか、またどのようなヴァリエーションがあるのか(例えば切断面をどこに設定するのか)など正確なところはいまひとつ判然とせず、私の理解も不十分なので今後の研究課題のひとつにしたいが、ここではとりあえず Veltman, 1986, p.162の図版 (fig.548, 550) を手がかりに漸減比をもとめてみる

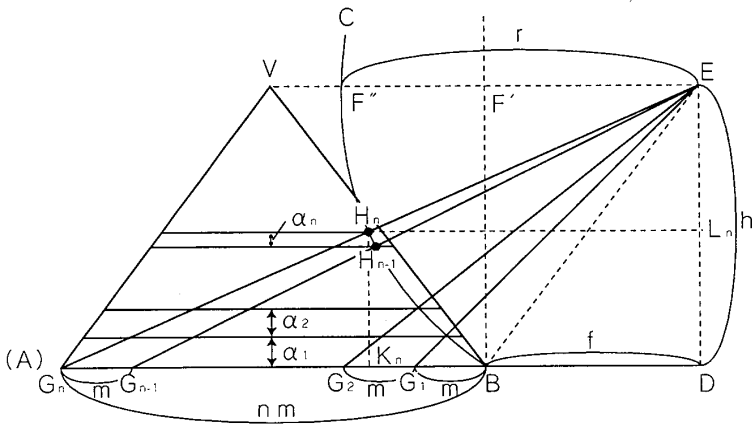
(挿図 8 a, b)。

(注)なおより一般的で今日的な曲面遠近法については, Barre/Flocon/Hansen(1968;1987)による本格的な研究もあるが, 本稿で論じているような漸減比の問題は扱っていないようである。



C : 画面(切断面)
r : 視距離

挿図 8 a 曲面遠近法の漸減値



挿図 8b 曲面遠近法の漸減比

漸減値

$$\alpha_n = h r \left\{ \frac{1}{\sqrt{h^2 + \{f + (n-1)m\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + (f + nm)^2}} \right\}$$

(ただし $f = \sqrt{r^2 - h^2}$)

(注)漸減比 $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ は上記の α_n の値から導けるが, あまりに複雑な式になるので省略する。

[証明]

挿図 8 a のような曲面遠近法においては, 画面(切断面)は, 直線 BF' ではなく, 円弧 BC である。また視距離は EF' ではなく $EF'' = EB = r$ であるとする。

弧 BC と視線 EG_1 との交点を H_1 , さらに図のような位置に点 L_1 をとる。

$$BD^2 + DE^2 = EB^2 \quad \therefore f^2 + h^2 = r^2 \dots\dots\dots ①$$

$$H_1L_1^2 + L_1E^2 = EH_1^2 = r^2 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{また } \triangle G_1K_1H_1 \sim \triangle G_1DE \text{ であるから } G_1K_1 : G_1D = K_1H_1 : DE \dots\dots\dots ③$$

$$\text{ところで } G_1K_1 = G_1B - K_1B = G_1B - (H_1L_1 - BD) = m - (H_1L_1 - f)$$

よって③は $m - (H_1 L_1 - f) : (m + f) = \alpha_1 : h$

$$\therefore \alpha_1 = h \left\{ 1 - \frac{H_1 L_1}{f + m} \right\} \dots\dots\dots ④$$

また $\triangle H_1 L_1 E \sim \triangle G_1 D E$ であるから, $H_1 L_1 : G_1 D = L_1 E : D E$

$$\therefore H_1 L_1 : (m + f) = L_1 E : h$$

$$\therefore L_1 E = \frac{h \cdot H_1 L_1}{f + m} \dots\dots\dots ⑤$$

$$\text{⑤を②に代入し, } (H_1 L_1)^2 + \left(\frac{h \cdot H_1 L_1}{f + m} \right)^2 = r^2$$

$$\therefore H_1 L_1 = \frac{(f + m) r}{\sqrt{h^2 + (f + m)^2}} \dots\dots\dots ⑥$$

⑥を④に代入し

$$\alpha_1 = h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f + m)^2}} \right\}$$

(ただし $f = \sqrt{r^2 - h^2}$)

一般に, 挿図 8 b において

$$B D^2 + D E^2 = E B^2 \quad \therefore f^2 + h^2 = r^2 \dots\dots\dots ①$$

$$H_n L_n^2 + L_n E^2 = E H_n^2 = r^2 \dots\dots\dots ②$$

また $\triangle G_n K_n H_n \sim \triangle G_n D E$ であるから

$$G_n K_n : G_n D = K_n H_n : D E \dots\dots\dots ③$$

$$\begin{aligned} \text{ところで } G_n K_n &= G_n B - K_n B = G_n B - (H_n L_n - B D) \\ &= n m - (H_n L_n - f) \end{aligned}$$

よって③は

$$\{n m - (H_n L_n - f)\} : (n m + f) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) : h$$

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = h \left\{ 1 - \frac{H_n L_n}{f + n m} \right\} \dots\dots\dots ④$$

また $\triangle H_n L_n E \sim \triangle G_n D E$ であるから $H_n L_n : G_n D = L_n E : D E$

$$\therefore H_n L_n : (n m + f) = L_n E : h$$

$$\therefore L_n E = \frac{h \cdot H_n L_n}{f + n m} \dots\dots\dots ⑤$$

⑤を②に代入し

$$H_n L_n^2 + \left(\frac{h \cdot H_n L_n}{f + n m} \right)^2 = r^2$$

$$H_n L_n = \frac{(f + n m) r}{\sqrt{h^2 + (f + n m)^2}} \dots\dots\dots ⑥$$

⑥を④に代入し

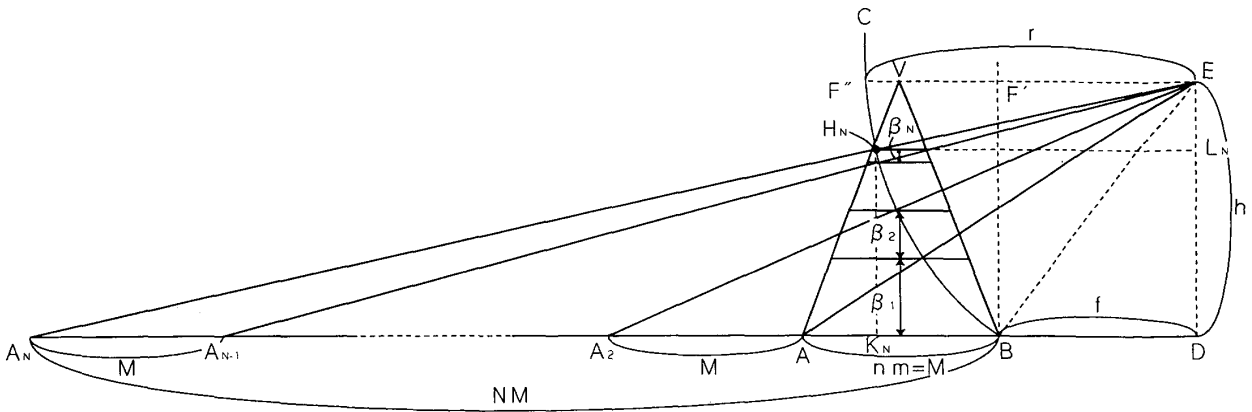
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha^2 + \dots + \alpha_n &= h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f + n m)^2}} \right\} \\ \therefore \alpha_n &= h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f + n m)^2}} \right\} - h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + \{f + (n - 1)m\}^2}} \right\} \\ &= h r \left\{ \frac{1}{\sqrt{h^2 + \{f + (n - 1)m\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + (f + n m)^2}} \right\} \end{aligned}$$

(ただし $f = \sqrt{r^2 - h^2}$)

2° 以上の作図を拡張した場合は次のようになる(挿図9)。第N層の漸減値 β_N は $4 - 1^\circ$ で求めた α_n の式と同じ構造の式である。

$$\beta_N = h r \left\{ \frac{1}{\sqrt{h^2 + \{f + (N-1)M\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + (f + NM)^2}} \right\}$$

(ただし $f = \sqrt{r^2 - h^2}$)



挿図9 曲面遠近法の拡張と漸減比

[証明]

挿図9において $BD^2 + DE^2 = EB^2 \quad \therefore f^2 + h^2 = r^2 \dots\dots\dots ①$

$$H_N L_N^2 + L_N E^2 = E H_N^2 = r^2 \dots\dots\dots ②$$

また $\triangle A_N K_N H_N \sim \triangle A_N D E$ であるから

$$A_N K_N : A_N D = K_N H_N : D E \dots\dots\dots ③$$

ところで $A_N K_N = A_N B - K_N B = A_N B - (H_N L_N - B D)$
 $= N M - (H_N L_N - f)$

よって③は $\{N M - (H_N L_N - f)\} : (N M + f) = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) : h$

$$\therefore \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N = h \left\{ 1 - \frac{H_N L_N}{f + N M} \right\} \dots\dots\dots ④$$

また $\triangle H_N L_N E \sim \triangle A_N D E$ であるから,

$$H_N L_N : A_N D = L_N E : D E$$

$$\therefore H_N L_N : (N M + f) = L_N E : h \quad \therefore L_N E = \frac{h \cdot H_N L_N}{f + N M} \dots\dots\dots ⑤$$

⑤を②に代入し,

$$H_N L_N^2 + \left(\frac{h \cdot H_N L_N}{f + N M} \right)^2 = r^2$$

$$H_N L_N = \frac{(f + N M) r}{\sqrt{h^2 + (f + N M)^2}} \dots\dots\dots ⑥$$

⑥を④に代入し

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N = h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f + N M)^2}} \right\}$$

$$\beta_N = h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f + NM)^2}} \right\} - h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + \{f + (N-1)M\}^2}} \right\}$$

$$= h r \left\{ \frac{1}{\sqrt{h^2 + \{f + (N-1)M\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + (f + NM)^2}} \right\} \quad (\text{ただし } f = \sqrt{r^2 - h^2})$$

5. 正則の平行対角線遠近法とその漸減比

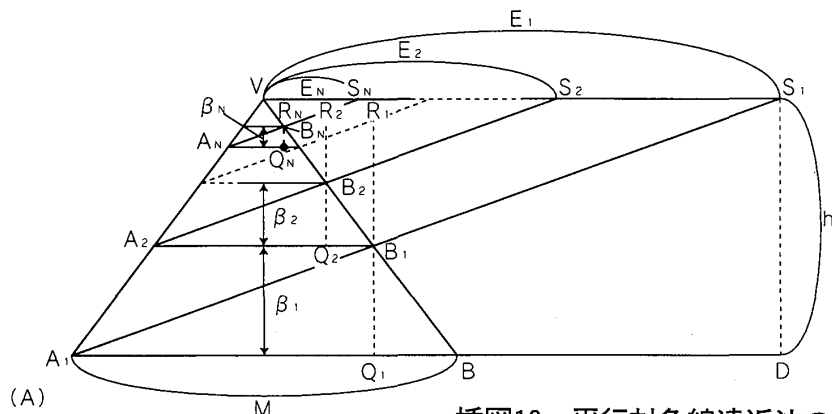
1° 「平行対角線遠近法」という名称は、レオナルド・ダ・ヴィンチが素描《マギの礼拝背景図》で用いている独自の作図法に対して、筆者（篠塚，1991,p.46）が命名したものである。通常遠近法の場合には、対角線が1点に集まるのに対して、この素描では対角線が平行に引かれているからである（同論文，p.24以下，挿図16a～d参照）。しかしこれは素描全体をしめる5つの層について言えるのであって、各層を細分する小さな格子のそれぞれに対角線を引いたときには通常遠近法と同じくある点に収束する。つまり全体は平行対角線遠近法で、細部は通常遠近法で構成された「合成的、複合的」な作図法なのである（片桐氏，1992,p19）。

レオナルドの素描についての再検討は7節以下でのべるが、ここではそうした複合的あるいは変則的な要素を排して、いわば平行対角線遠近法の純粋なモデルともいべきものを想定し、その特徴を考えてみたい。小見出しにつけた「正則の」は、このモデルに基づいていることを意味している。[辻氏の近著(1996, pp.94-98, 116-130)でふれられている「天使の遠近法」は、私の言う「正則の」平行対角線遠近法と同一のものである。しかし両者の研究の視点がやや異なるため、その研究成果もおおのずと異なることは明らかであろう]

2° 平行対角線遠近法のモデルと漸減比

これまではまず比較的小さな区画mとその漸減値 α を基準に考え、つぎに概念を拡張して大きな区画Mとその漸減値 β に適用させてきたが、平行対角線遠近法の場合には、(レオナルドの素描がそうであるように) 大きな区画Mとその漸減値 β から考えた方が理解しやすいと思われるので、大区画、小区画の順に説明する。

挿図10において、漸減値 β_N と漸減比 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}}$ ，および視距離は次のようになる。



挿図10 平行対角線遠近法の漸減比 (大区画)

漸減値

$$\beta_N = \frac{E_1^{N-1} h M}{(E_1 + M)^N} = \frac{\underbrace{h M}_{\text{初項}}}{\underbrace{E_1 + M}_{\text{公比}}} \left(\frac{E_1}{E_1 + M} \right)^{N-1}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)}_{\text{公比}} \beta_{N-1} = \underbrace{\beta_1}_{\text{初項}} \underbrace{\left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)^{N-1}}_{\text{公比}}$$

漸減比

$$\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_N}{E_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M} = 1 - \frac{\beta_1}{h} = \frac{h - \beta_1}{h}$$

視距離

$$E_N = \frac{E_1^N}{(E_1 + M)^{N-1}} = \underbrace{E_1}_{\text{初項}} \underbrace{\left(\frac{E_1}{E_1 + M} \right)^{N-1}}_{\text{公比}} = \underbrace{\left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)}_{\text{公比}} E_{N-1} = \underbrace{E_1}_{\text{初項}} \underbrace{\left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)^{N-1}}_{\text{公比}}$$

[証明]

挿図10において $\triangle A_1 B B_1 \sim \triangle S_1 V B_1$ であるから、それぞれの三角形の底辺と高さの比は

$$A_1 B : S_1 V = Q_1 B_1 : R_1 B_1$$

$$\therefore M : E_1 = \beta_1 : (h - \beta_1) \quad \therefore \beta_1 = \frac{h M}{E_1 + M} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

同様にして

$$\triangle A_2 B_1 B_2 \sim \triangle S_2 V B_2 \text{から } A_2 B_1 : S_2 V = Q_2 B_2 : R_2 B_2$$

$$\therefore \triangle A_2 B_1 : E_2 = \beta_2 : (h - \beta_1 - \beta_2) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ところで $\triangle A_2 B_1 V \sim \triangle A_1 B V$ であるから、それぞれの三角形の底辺と高さの比は

$$A_2 B_1 : A_1 B = R_2 Q_2 : R_1 Q_1$$

$$\therefore A_2 B_1 : M = (h - \beta_1) : h \quad \therefore A_2 B_1 = M \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

また $\triangle S_2 V A_2 \sim \triangle S_1 V A_1$ であるから

$$S_2 V : S_1 V = R_2 Q_2 : R_1 Q_1$$

$$\therefore E_2 : E_1 = (h - \beta_1) : h \quad \therefore E_2 = E_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

①③④を②に代入し、 β_2 について解くと

$$\beta_2 = \frac{E_1 h M}{(E_1 + M)^2} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

同様にして第三層の大きさ β_3 を求めると

$$\beta_3 = \frac{E_1^2 h M}{(E_1 + M)^3}$$

一般に第N層の大きさ β_N は

$$\beta_N = \frac{E_1^{N-1} h M}{(E_1 + M)^N} = \frac{h M}{E_1 + M} \left(\frac{E_1}{E_1 + M} \right)^{N-1}$$

これは数列 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \dots$ が初項 $\beta_1 = \frac{h M}{E_1 + M}$, 公比 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M}$ の等比数列であることを示す。

なお①を E_1 について解くと $E_1 = M \left(\frac{h}{\beta_1} - 1 \right)$ であるから、公比は

$$\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M} = \frac{h - \beta_1}{h} = 1 - \frac{\beta_1}{h} \dots\dots\dots ⑥$$

$$\text{したがって } \beta_N = \beta_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)^{N-1} = \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right) \beta_{N-1}$$

移動する視距離 E_1, E_2, \dots, E_n , については、①を④に代入すると

$$E_2 = E_1 \left\{ 1 - \frac{h M}{h (E_1 + M)} \right\} = \frac{E_1^2}{E_1 + M}$$

E_3 については、 $\triangle S_3 V A_3 \sim \triangle S_1 V A_1$ であるから $E_3 : E_1 = (h - \beta_1 - \beta_2) : h$ なので

$$\begin{aligned} E_3 &= E_1 \left(1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{h} \right) = E_1 \left[1 - \frac{1}{h} \left\{ \frac{h M}{E_1 + M} + \frac{E_1 h M}{(E_1 + M)^2} \right\} \right] (\because \text{①, ⑤を代入}) \\ &= \frac{E_1^3}{(E_1 + M)^2} \end{aligned}$$

一般にN番目の視距離 E_N は

$$E_N = \frac{E_1^N}{(E_1 + M)^{N-1}} = E_1 \left(\frac{E_1}{E_1 + M} \right)^{N-1}$$

これは β_N と同じく公比が $\frac{E_1}{E_1 + M} = 1 - \frac{\beta_1}{h}$ の等比数列であることを示す。

(公比が $1 - \frac{\beta_1}{h}$ であることは④の式からも確かめられる)

$$\text{したがって } E_N = E_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right)^{N-1} = \left(1 - \frac{\beta_1}{h} \right) E_{N-1}$$

3° 大区画と小区画との関係

次に挿図11aのように小区画mの場合の奥行き α_n について考えてみる。

先の大区画、Mの場合の奥行き β_n と同じ構造になっており、

$$M \rightarrow m, S_N \rightarrow T_n, E_N \rightarrow e_n, \beta_N \rightarrow \alpha_n$$

と記号を代えればよいことは明らかである。つまり漸減値 α_n と漸減比 $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ は

$$\alpha_n = \frac{e_1^{n-1} h m}{(e_1 + m)^n} = \frac{h m}{e_1 + m} \left(\frac{e_1}{e_1 + m} \right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\alpha_1}{h} \right) \alpha_{n-1} = \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{h} \right)^{n-1}$$

$$\left(\text{初項 } \alpha_1 = \frac{h m}{e_1 + m}, \text{ 公比 } \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{e_1}{e_1 + m} = 1 - \frac{\alpha_1}{h} \text{ の等比数列} \right)$$

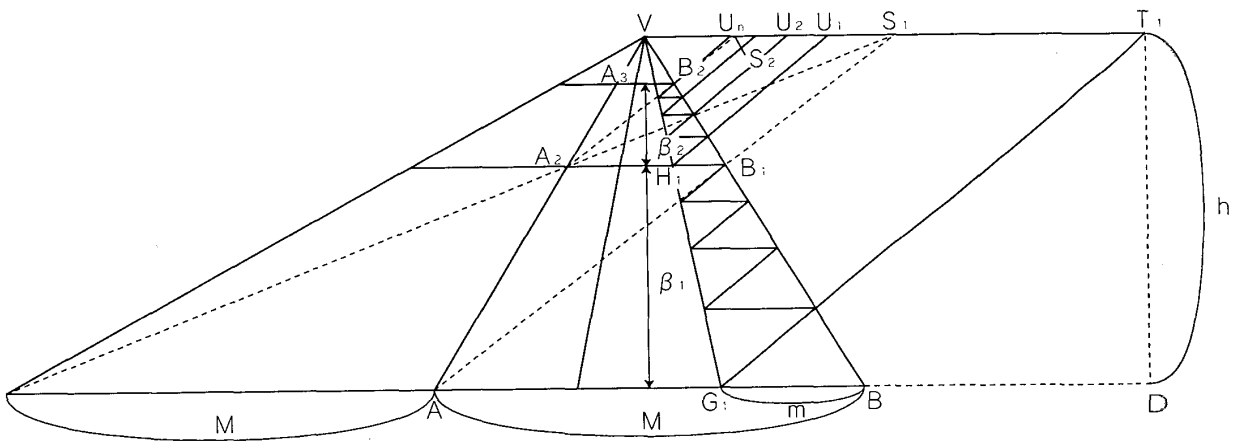
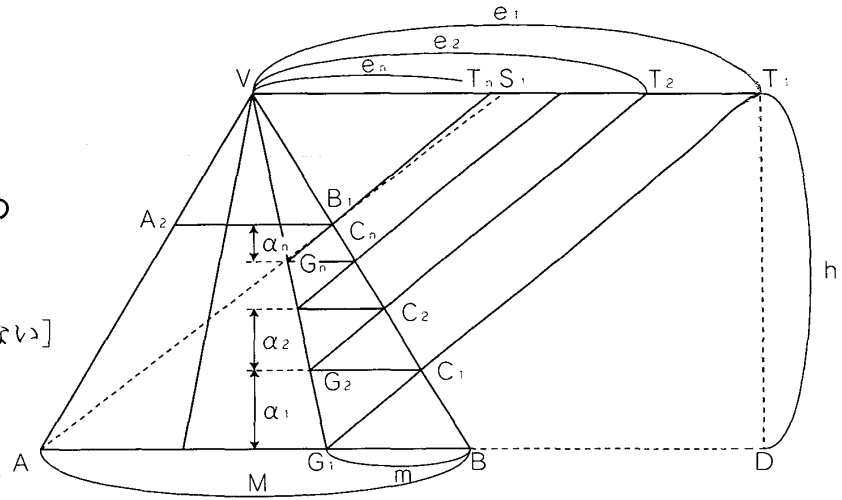
$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{e_1}{e_1 + m} = 1 - \frac{\alpha_1}{h} = \frac{h - \alpha_1}{h}$$

また先ほどの挿図10の大区画と挿図11aの小区画との関係は挿図11bのようになり、連続性と一貫性をもつ「モデル」となることがわかる。この挿図11bをさらに格子模様に変え

たものが挿図11cである。[この挿図11cに明らかな対角線の平行性と収束性については次の5-4°-(1)を参照]

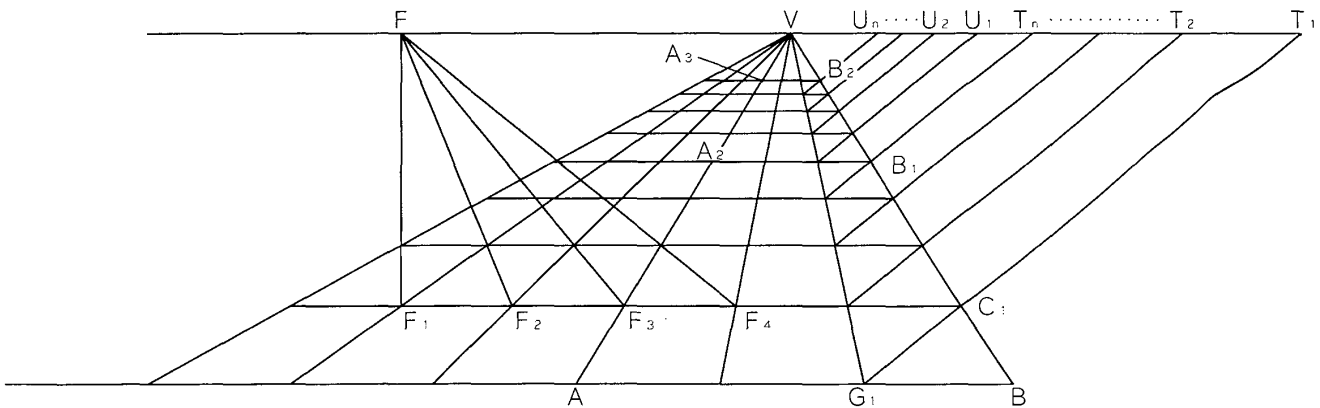
挿図11a 平行対角線遠近法の漸減比 (小区画)

[$G_1T_1 // G_2T_2 // G_nT_n$,
 G_1T_1 と AS_1 は一般に平行ではない]



挿図11b 平行対角線遠近法の漸減比 (小区画と大区画)

[$G_1T_1 // H_1U_1$, $AS_1 // A_2S_2$, G_1T_1 と AS_1 は平行ではない]



挿図11c 平行対角線遠近法の格子と対角線

4° 平行対角線遠近法の性質

正則の平行対角線遠近法には通常の線遠近法にはないきわだった特徴がある。それは対角線が収束性と平行性を同時に保持していることと、至るところに等比数列が見出されることである。

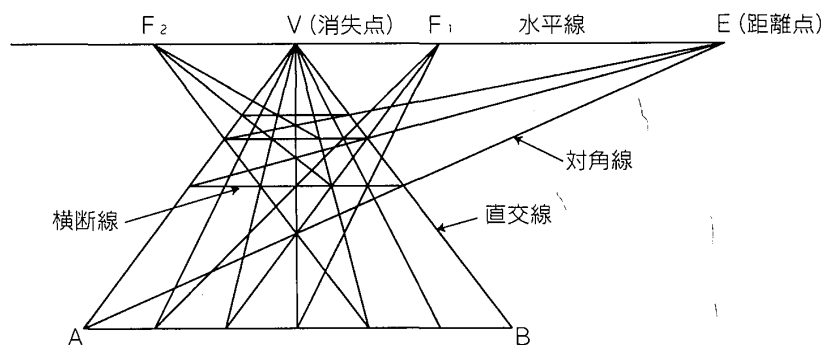
(1) 収束性と平行性

通常の線遠近法の場合には、横幅と奥行きの比が等しい四角形に対角線を引くと、それらの延長線は必ず水平線上のひとつの点に集まる(挿図12のE, F_1 , F_2)。あらためて説明することではないが、四角形が正方形の場合には、その対角線が集まる点を距離点と呼んでいる(挿図12のE)。その点と消失点との長さが視距離に等しいところからの呼称であり、この性質を利用して作図するのが距離点法である。また距離点は消失点を中心にして左右対称の位置に2つある。[この距離点の概念の一般化については、拙稿(1982) p.118以下を参照されたい]

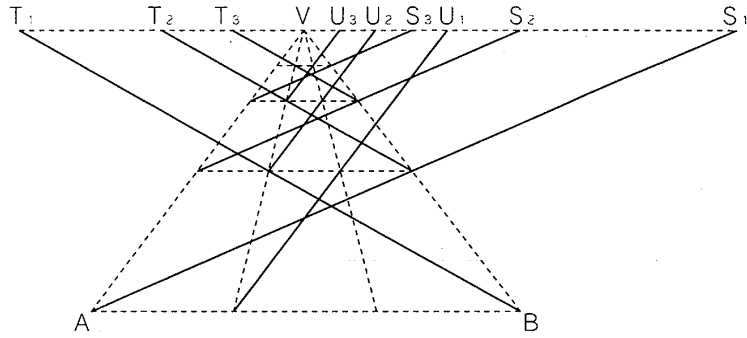
同じ横断線上の対角線が一点に収束する(挿図12の F_1)だけでなく、同じ直交線上の対角線も一点に収束する(挿図12の F_2)。横幅と奥行きの比が等しい四角形であれば、その四角形に引いた対角線は必ず一点に収束する。したがって通常の遠近法では、直交線と対角線が収束し、横断線のみが平行であるといえる。

これに対して平行対角線遠近法では、直交線が収束し、横断線が平行である点は通常の遠近法と同じであるが、対角線に関しては著しい相違がある。「平行対角線」遠近法という呼称は誤解を与えやすいが、すべての対角線が平行なわけではない。同じ直交線上の対角線は平行である(挿図13aの直交線AV上の S_1 , S_2 , S_3 またBV上の T_1 , T_2 , T_3 など)が、同じ横断線上の対角線は一点に収束するのである(挿図13bの F_1 , F_2 , F_3) (先の挿図11cも参照)。
[なお上記と同じことをすでに辻氏(1996) p.121③④が指摘している]

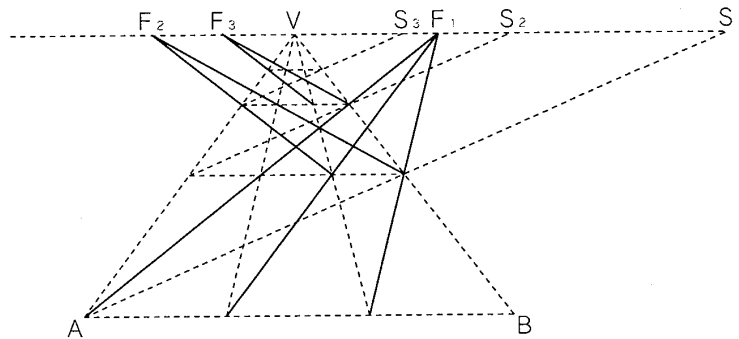
このように見えてくると平行対角線遠近法は、通常の遠近法になれたわれわれの目には、実にユニークな性質をもった遠近法として現れてくる。その不思議な魅力は、次にふれる「等比数列の巣」であるという性格によっていっそう増すように思われる。



挿図12 通常の遠近法 (対角線はすべて収束する)



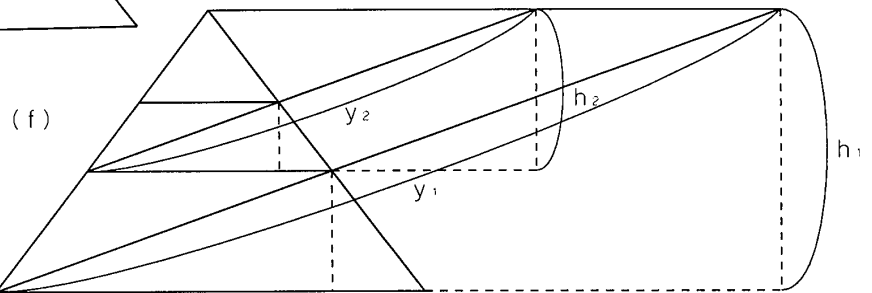
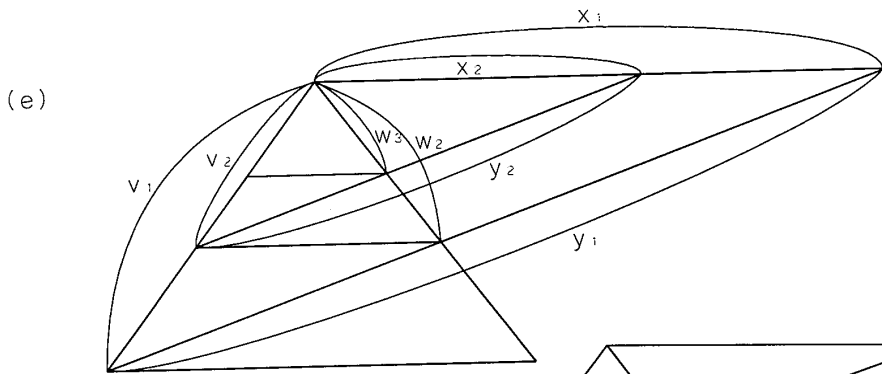
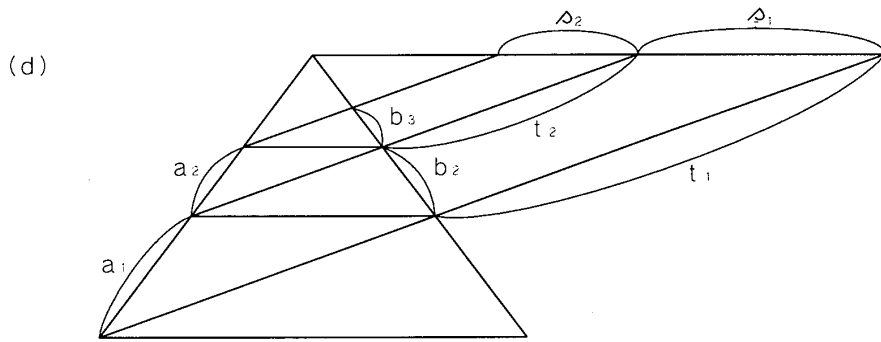
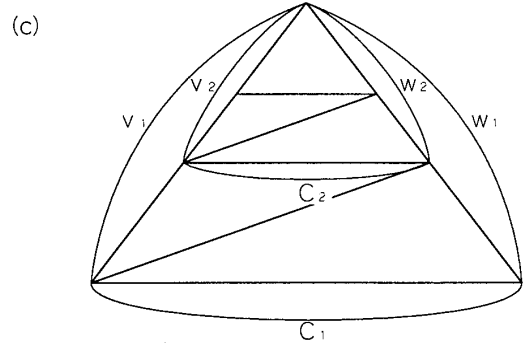
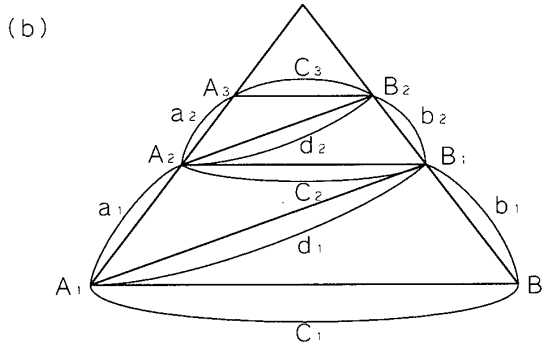
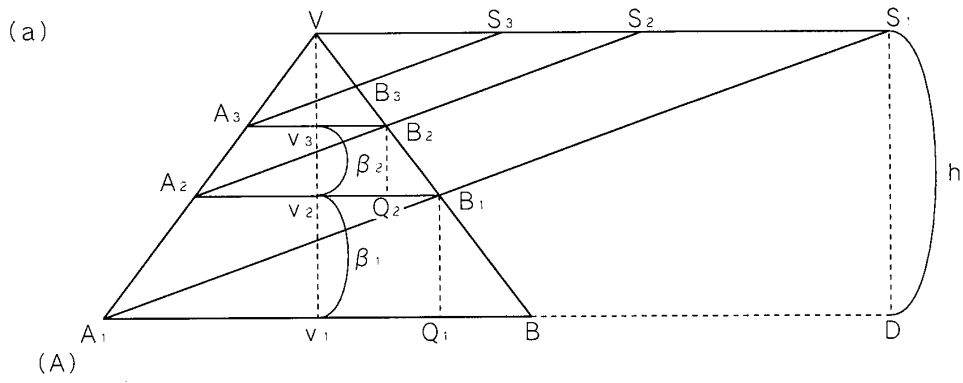
挿図13a 平行対角線遠近法の平行性
(同一の直交線上の対角線は平行である)



挿図13b 平行対角線遠近法の収束性
(同一の横断線上の対角線は収束する)

(2) 等比数列

すでに述べたように(5-2°)平行対角線遠近法の各層の漸減比は等比数列(幾何数列)になっている。これは通常の遠近法(アルベルティの遠近法および距離点法)や曲面遠近法では等比数列にはならないことと比較するならば、平行対角線遠近法のきわめて重要な性質と云わなければならない。[ただし等比数列ならばすべて平行対角線遠近法になるというわけではない(挿図29a参照)]しかもこの等比数列が図形のいたるところに(挿図15参照)、まるでクモの巣のように張り巡らされているのである。[なおここでふれる問題は1-2°でも述べたように、レオナルドの素描の5つの層の幅および視距離の長さが、なぜともに公比 $\frac{11}{15}$ の等比数列なのかという疑問から生まれた]



挿図14a~f 平行対角線遠近法における線分の比

[証明]

まず最も簡単な場合である第1層と第2層によって作図された場合の様々な線分の比を考えてみる (挿図14a~f)。

与えられた条件は図(a)において

$$A_1B // VS_1 // A_2B_1 // A_3B_2$$

$$A_1S_1 // A_2S_2 // A_3S_3$$

またV, B₁, B₂から垂線を引き,

$$A_1B \perp VV_1, A_1B \perp B_1Q_1, A_2B_1 \perp B_2Q_2$$

△BB₁Q₁と△B₁B₂Q₂はともに直角三角形で∠Q₁BB₁ = ∠Q₂B₁B₂であるから

$$\triangle BB_1Q_1 \sim \triangle B_1B_2Q_2 \quad \therefore \frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{B_2Q_2}{B_1Q_1} = \frac{V_3V_2}{V_2V_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

図(b)において △A₁BB₁ ∼ △A₂B₁Bであるから

$$\therefore \frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{A_2B_1}{A_1B} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} \quad \therefore \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$$

同じく △A₁B₁A₂ ∼ △A₂B₂A₃であるから

$$\therefore \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_3B_2}{A_2B_1} \quad \therefore \frac{d_2}{d_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{c_3}{c_2} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$$

同じ様にして

図(c)において $\frac{c_2}{c_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$

図(d)において $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2}{t_1} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$

図(e)において $\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_3}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$

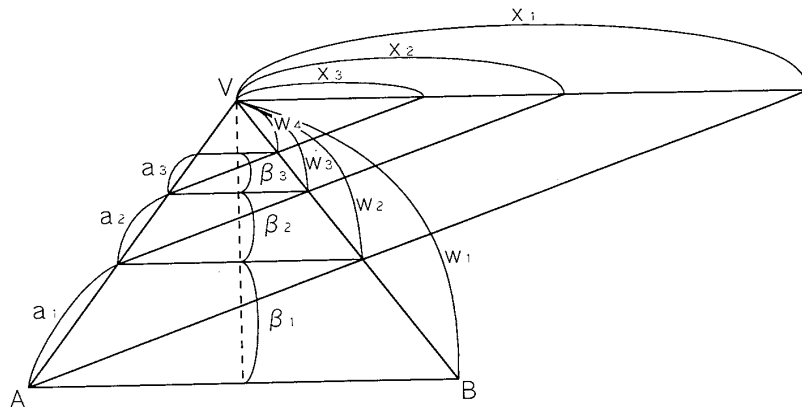
図(f)において $\frac{h_2}{h_1} = \frac{y_2}{y_1} \left(= \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$

〔なお(a)において $\frac{VA_2}{VA_1} = \frac{VV_2}{VV_1} = \frac{h-\beta_1}{h} \quad \therefore \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{h-\beta_1}{h}$ 〕

このように $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ という比は図形のいたるところに見出される。既に述べたものを列挙すると

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{h-\beta_1}{h}$$

さらに第3層, 第4層……第n層と作図してゆくと, 同じ比が至るところに無限に作り出されてゆく (挿図15)。まさしく「等比数列の巢」となっている。



挿図15 平行対角線遠近法における等比数列

主なものをあげれば

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \dots = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = \frac{w_4}{w_3} = \dots$$

$$= \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \dots$$

(3) 漸減比と視高，視距離，区画との相互関係

平行対角線遠近法には，上記のことがら以外にも，いくつか重要な性質がある。

1. 視高 h と，第 1 層の漸減値 β_1 が一定ならば，視距離や区画の大きさにかかわらず，漸減値 β_n および漸減比 $\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$ は一定である (挿図16a~d)。

挿図16a を標準の漸減図としてみる。この時視距離 h ，第 1 層の漸減値 β_1 ，視距離 $V S_1$ ，区画 $AB = M$ である。図 b は視距離を $V T_1$ ，区画を $X_1 B = m$ とした場合で，図 c は視距離を $V U_1$ ，区画を $Y_1 B = 2M$ とした場合である。図 b, c のように視距離と区画をそれぞれ小さくしたり，大きくしても， β_1 の次の漸減値 β_2, \dots, β_n は変化しない。このことは図 a ~ c をひとつに合成した図 d から明らかである。したがって漸減比 $\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$ も変わらない。以上述べたことは 5-2° の⑥の式 $\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = 1 - \frac{\beta_1}{h}$ つまり漸減比が h と β_1 の関数であることから明らかである。

(注) 挿図16d のように視高 h と漸減値 β_1 が一定ならば，視距離と区画は比例する。つまり

$$\frac{S_1 V}{AB} = \frac{T_1 V}{X_1 B} = \frac{U_1 V}{Y_1 B}$$

[証明] $\triangle ABB_1 \sim \triangle S_1 V B_1 \quad \therefore \frac{S_1 V}{AB} = \frac{R_1 B_1}{Q_1 B_1} \dots\dots\dots ①$

$$\triangle X_1 B B_1 \sim \triangle T_1 V B_1 \quad \therefore \frac{T_1 V}{X_1 B} = \frac{R_1 B_1}{Q_1 B_1} \dots\dots\dots ②$$

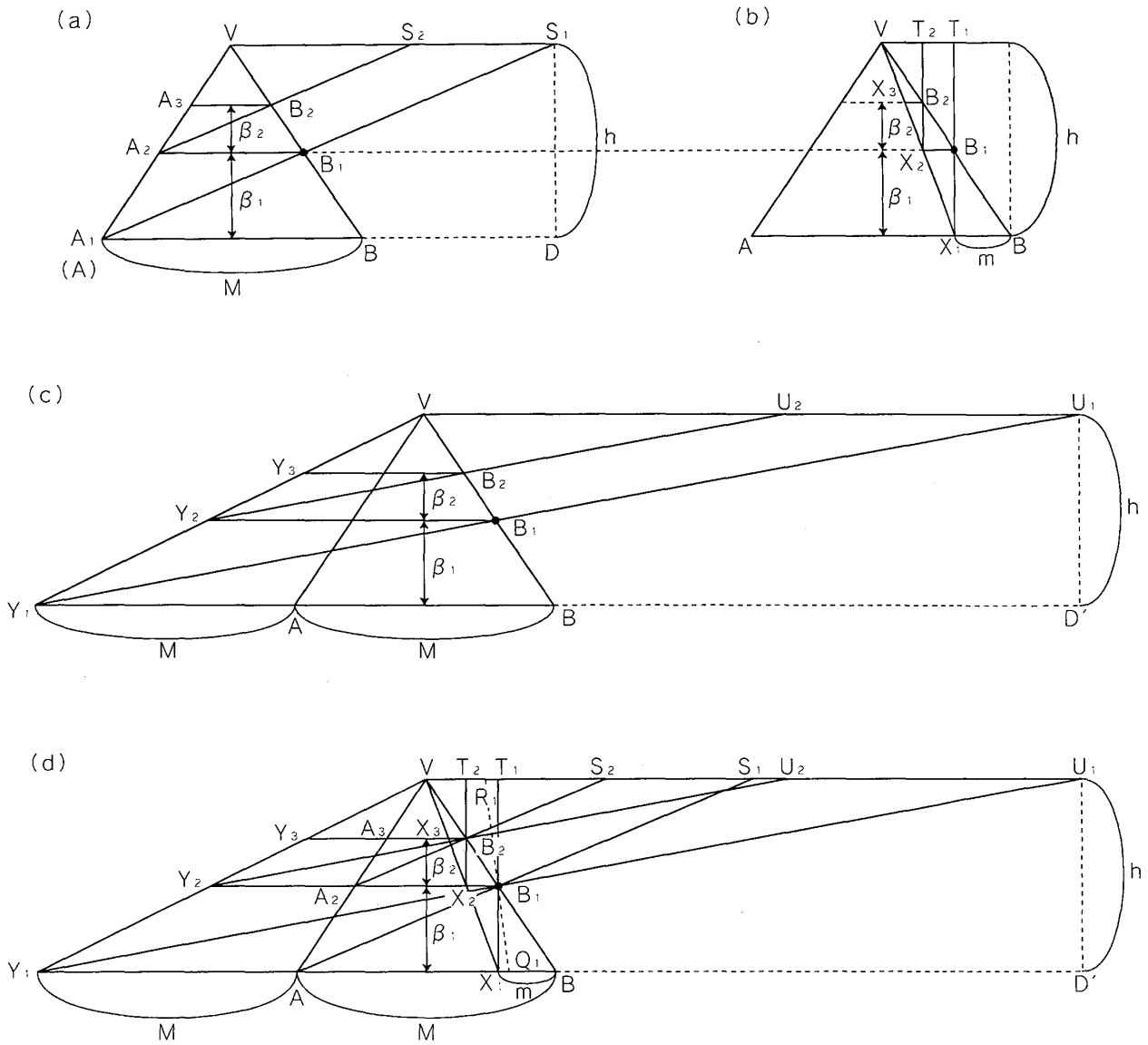
$$\triangle Y_1 B B_1 \sim \triangle U_1 V B_1 \quad \therefore \frac{U_1 V}{Y_1 B} = \frac{R_1 B_1}{Q_1 B_1} \dots\dots\dots ③$$

①②③より上式が成立

同様にして

$$\frac{S_2 V}{A_2 B_1} = \frac{T_2 V}{X_2 B_1} = \frac{U_2 V}{Y_2 B_1}$$

$$\left[\text{また } \frac{S_2 V}{S_1 V} = \frac{A_2 B_1}{AB} = \dots = \frac{\beta_2}{\beta_1} \right]$$



挿図16a~d 視高 h と漸減値 β_1 が一定の場合

2. 区画Mと視距離 E_1 が一定ならば、視高や漸減値の大きさにかかわらず、漸減比は一定である (挿図17a, b)。つまり

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \dots = \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} = \dots = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$$

このことは5-2° の⑥の式 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M}$, つまり漸減比がMと E_1 の関数である

ことから確かめられる。

(注1) 区画Mと最初の視距離 E_1 が一定ならば、2番目以後の視距離も等しく ($S_1V_1 = T_1V_2$ ならば $S_2V_1 = T_2V_2$, \dots $S_NV_1 = T_NV_2$) , またその漸減比も等しい。つまり (挿図17a, b)

$$\frac{S_2S_3}{S_1S_2} = \frac{S_3S_4}{S_2S_3} = \dots = \frac{S_{N+1}S_{N+2}}{S_NS_{N+1}} = \frac{T_2T_3}{T_1T_2} = \dots = \frac{T_{n+1}T_{n+2}}{T_nT_{n+1}}$$

しかも、これらの視距離の漸減比は、先ほどの奥ゆきの漸減比とも等しい。つまり

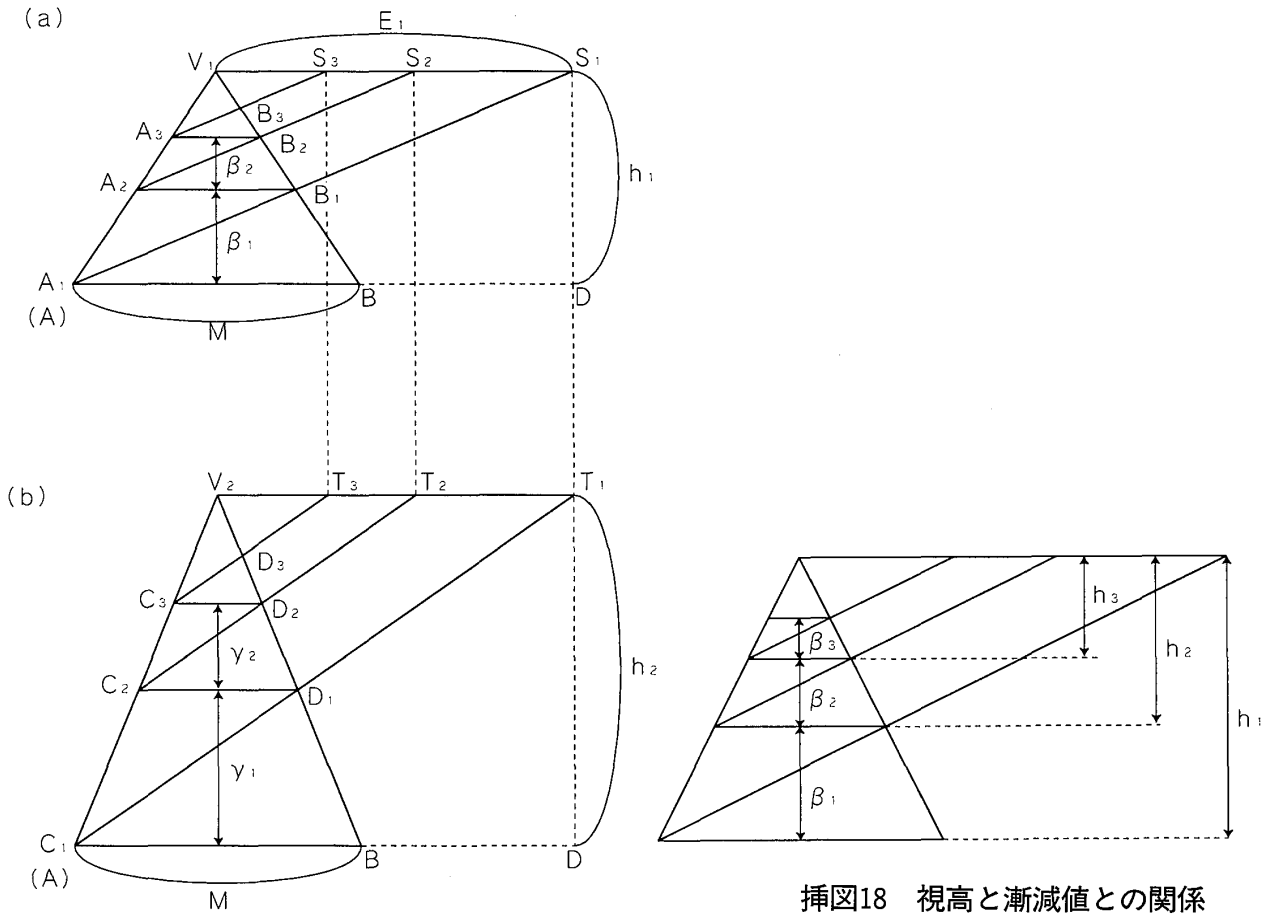
$$\frac{T_{n+1}T_{n+2}}{T_nT_{n+1}} = \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1+M}$$

このように平行対角線遠近法で作図される図形には同じ比がくもの巣のように張りめぐらされている
(前述の5-4°-(2)参照)。

(注2) なお挿図18において $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ であるので $\frac{\beta_1}{h_1} = \frac{\beta_2}{h_2}$

同じようにして、

$$\frac{\beta_1}{h_1} = \frac{\beta_2}{h_2} = \frac{\beta_3}{h_3} = \dots = \frac{\beta_N}{h_N}$$



挿図18 視高と漸減値との関係

挿図17a, b 区画Mと視距離 E_1 が一定の場合

5° 平行対角線遠近法の作品例

私はこの正則の平行対角線遠近法をきわめて観念的につまり純粋に幾何学的なモデルとして作りだしたのであるが、本論文の脱稿間近になって、この作図法をそのまま適用できる作品があることに気づいた。それだけでも驚きであったが、その作品が有名なアンブロージオ・ロレンツェティの《聖告》(シエナ, 国立絵画館) であることになおのこと驚いた。自然科学では純粋に数学的にあみ出された理論が現実の事象にうまく当てはまったりすることがよくあるようだが、絵画作品で似たような例に出会い少なからず驚いている。

しかしさらに驚いたのは、辻氏が近著(1996, pp.94-98, 116-130)で同じようなモデルを〈天使の遠近法〉という名称で提示され、その作品例を数点指摘されたことである。14世紀前後の遠近法の歴史的展開についても辻氏の研究(p.84-94)を参照されたい。

なお私の提示した関係式を用いてさきのロレンツェティの《聖告》を分析してみると、視距離が区画の7倍、視高は漸減値の8倍、そして漸減比は $\frac{7}{8}$ であることがわかる(第1層は額縁に隠れている部分があるので、まず第2層以上から計測する必要がある)。

6. 一般解の比較

これまで述べてきたさまざまな遠近法の漸減値、漸減比を一般解のかたちで比較すると、次の表のようになる。

表 さまざまな遠近法の漸減比の一般解の比較

		アルベルティの 作図法(挿図2)	距離点法 (挿図6 b)	平行対角線遠近法 (挿図11 a)	曲面遠近法 (挿図8 b)
共通の条件		視高: h / 区画: m /		最初の漸減値: α_1 /	n 番目の漸減値: α_n (n は自然数)
異なる条件		視距離は一定: d		視距離は変動: e_1, e_2, \dots, e_n	視距離は円弧: r $f = \sqrt{r^2 - h^2}$
漸減値	α_1	$\frac{hm}{d+m}$	$\frac{hm}{e_1+m}$	$h \left\{ 1 - \frac{r}{\sqrt{h^2 + (f+m)^2}} \right\}$	
	α_n	$\frac{d hm}{(d+nm) \{d+(n-1)m\}}$	$\frac{e_1^{n-1} hm}{(e_1+m)^n}$	$hr \left\{ \frac{1}{\sqrt{h^2 + \{f+(n-1)m\}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + (f+nm)^2}} \right\}$	
漸減比	$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$	$\frac{d+(n-2)m}{d+nm}, \frac{h+(n-3)\alpha_1}{h+(n-1)\alpha_1}$	$\frac{e_1}{e_1+m}, \frac{h-\alpha_1}{h}$	[上の α_n の式から導けるが複雑]	

II章 特殊な問題

ここでは前章で論じてきた様々な遠近法における漸減比の一般解を利用しながら、より特殊な問題を2つ考えてみたい。

7. レオナルド・ダ・ヴィンチの素描《マギの礼拝背景図》の漸減比

この素描については拙稿(1991)で詳しく述べたわけであるが、ここでは特に漸減比に関連する部分を、その後の研究や他の研究者の指摘を参考にしながら、再検討してみたい。

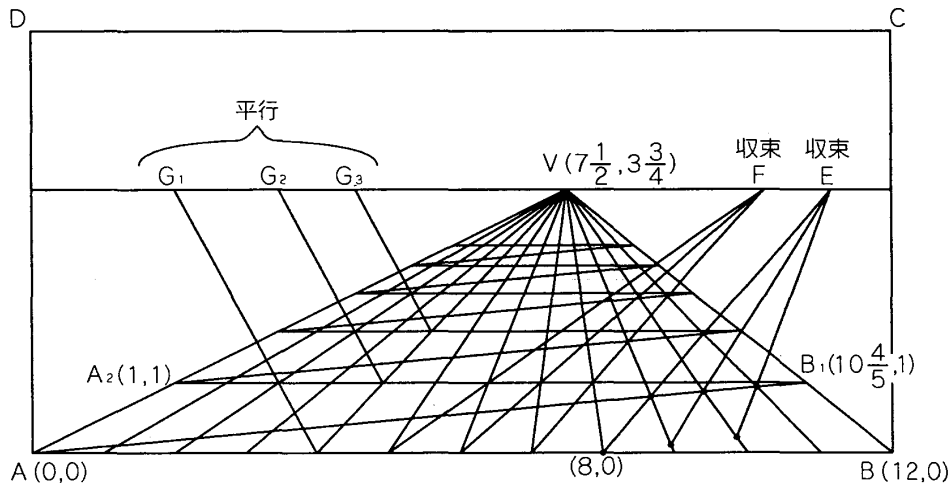
1° 用いられている遠近法の全般的特徴＝複合的な作図法

[平行対角線遠近法と距離点法との併用]すでに5-1°でもふれたように、この素描の遠近法の全体的枠組み(5つの層)は平行対角線遠近法で構成されているのに対して、細部の各層内の奥行きは通常の距離点法と同じ方法で作図されている。漸減値や漸減比についても、5つの大きな層では平行対角線遠近法の式(5-2°)が成り立ち、それぞれの層内の細かな部分では距離点法の式(3-1°)があてはまることになる。したがってこの素描はきわめて「合成的、複合的」な作図法(片桐氏, 1992, p19)であり、変則的な遠近法である。少なくとも5-1°～5°で論じた「正則の」平行対角線遠近法とは一線を画すべき作図法といわなければならない。

(注) この素描で利用されているような対角線について、辻氏(1995, p50-54; 1996, p109)は、距離点法が明確に理論づけられる以前に、画家たちが経験的に用いていた方法であろうと考え、こうした作図法を〈対角線法〉と名付けている。

[不連続性] こうした変則性のために、「正則の」平行対角線遠近法の場合にみられる漸減値の連続性と一貫性(5-3°)がこの素描には欠けている。拙稿(篠塚, 1991, p46, 4行目)でもふれたが、各層の分かれ目の前後の横断線の幅(すなわち漸減値)が不連続で、例えば第1層の最後の漸減値が第2層の最初の漸減値よりも小さいというような不合理が生じている。

[平行性と収束性] 「正則の」平行対角線遠近法における平行性と収束性の併存についてはすでに指摘したが(5-4°-(1)), レオナルドの素描の場合には、さらに距離点法を併用していることに起因する収束性が加わる。くどい説明になるが、5つの層全体では平行対角線遠近法の平行性と収束性が成り立ち、細部の各層内では距離点法の収束性が見られることになる(挿図19)。



挿図19 レオナルドの《マギの礼拝背景》素描における収束性と平行性
 (Eは距離点法による収束性、Fは平行対角線遠近法による収束性、G₁, G₂, G₃は平行対角線遠近法による平行性)

2° 5つの層の漸減比が公比 $\frac{11}{15}$ の等比数列になる理由

レオナルドの素描の5つの層の幅が、公比 $\frac{11}{15}$ の等比数列になっていることはすでに拙稿(篠塚, 1991, p.31の注1)で指摘したが、なぜこうした値の公比になるのかを、漸減比の一般解を利用して確認しておきたい。

5-2°の平行対角線遠近法の漸減比を求める式 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = 1 - \frac{\beta_1}{h}$ に、この素描をあてはめてみると、視高 $h = \frac{15}{4}$ 、最初の層の漸減値 $\beta_1 = 1$ であるから

$$1 - \frac{\beta_1}{h} = 1 - 1 \div \frac{15}{4} = \frac{11}{15}$$

また別の式 $\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M}$ に当てはめても同じ値 $\frac{11}{15}$ ($=0.73333\cdots$) となる。すなわち最初の対角線の視距離 $E_1 = 33$ 、大きな区画(モジュール線)の長さ $M = 12$ であるから、

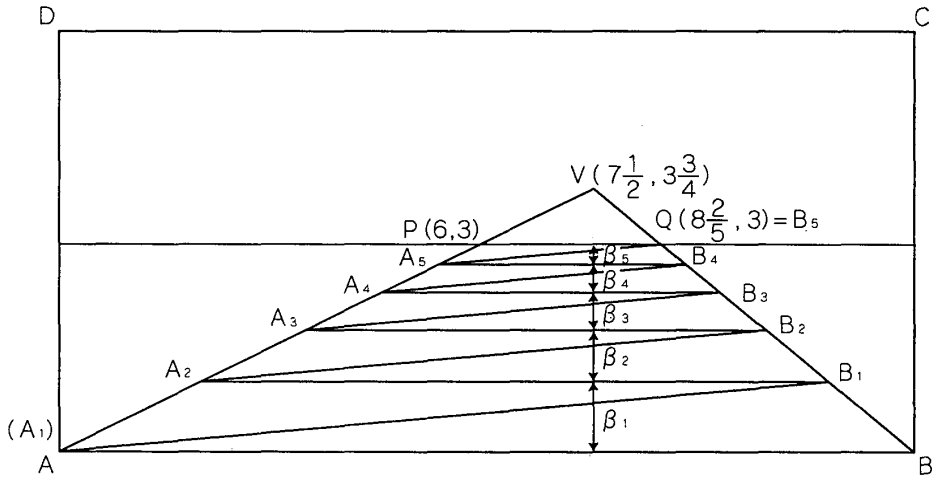
$$\frac{E_1}{E_1 + M} = 33 \div (33 + 12) = \frac{11}{15}$$

視距離の長さも同じ公比 $\frac{11}{15}$ の等比数列になるが(篠塚, 1991, p.42の注1)、その理由もいまや挿図15などから明らかである。

[なおレオナルドの素描と $\frac{2}{3}$ 漸減比との関係については8-4°を参照されたい]

3° 点B₅と点Qの一致問題

このレオナルドの素描には気になる未解決の問題が残されていた。点B₅が点Qに一致するように5本の平行な対角線を引くには第1層の幅をどのような値にすればよいのかという問題である(篠塚, 1991, p.31の注2参照)。下記のように代数的には $\beta_1 = \frac{15}{4} \left(1 - \sqrt[5]{\frac{1}{5}}\right)$ と解けたが、このような無理数については目分量で作図するしかないであろう。



挿図20 レオナルドの《マギの礼拝背景》素描：B₅とQを一致させるための漸減値

[証明] 挿図20において視高hはVのy座標、つまり $h = 3\frac{3}{4}$ である。第1層の幅つまりB₁のy座標を β_1

とし、公比 $\frac{\beta_2}{\beta_1} (= \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{\beta_4}{\beta_3} = \frac{\beta_5}{\beta_4})$ をrとすると、 $5-2^\circ$ の漸減比の式から

$$r = 1 - \frac{\beta_1}{h} = 1 - \beta_1 \div 3\frac{3}{4} = 1 - \frac{4}{15}\beta_1 \quad \therefore \beta_1 = \frac{15}{4}(1-r) \quad \text{……①}$$

公比がrならば第2層以上の幅は $\beta_2 = \beta_1 r$, $\beta_3 = \beta_1 r^2$, ……

B₅がQに一致するためには β_1 から β_5 までの5つの層の幅の合計が3であればよいから

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 3$$

$$\therefore \beta_1 + \beta_1 r + \beta_1 r^2 + \beta_1 r^3 + \beta_1 r^4 = \beta_1(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

$$= \frac{15}{4}(1-r)(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

$$= \frac{15}{4}(1-r^5) = 3$$

$$\therefore 1 - r^5 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \therefore r^5 = \frac{1}{5} \quad \therefore r = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \quad \text{……②}$$

[公比rは5乗して $\frac{1}{5} = 0.2$ となる数]

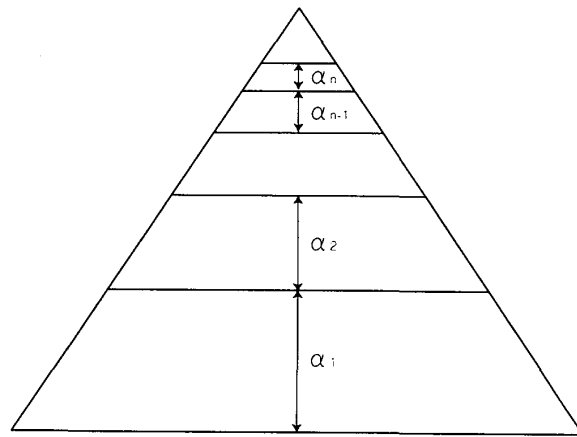
②を①に代入し

$$\beta_1 = \frac{15}{4} \left(1 - \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \right)$$

8. $\frac{2}{3}$ 漸減比

1° アルベルティはその著『絵画論』のなかで、当時の画家たちが行っている誤った遠近法の作図方法を指摘している (Alberti/Grayson, 1975, p.36-39; 邦訳 p.26-27, p.88, 第7図)。横断線間の幅 (漸減値) を順次 $\frac{2}{3}$ とするやり方であり、こうして作図された漸減値の比をこ

ここでは「 $\frac{2}{3}$ 漸減比」と呼ぶことにする(挿図21)。この箇所についてはすでに多くの研究者により言及されてきたので、詳細はそれらに譲るが(裾分氏, 1975, p.248-254; 1986, p.92/片桐氏, 1992p.16-19/辻氏, 1996, p.24-25), アルベルティの文を読む限りでは、この作図は横断線間の幅を物差しで計測するだけの単純な方法と思われる。そして視距離などの概念とは無関係に作図できる最も簡単な方法であろう。しかしこれまで述べてきたような「一般化」できる遠近法で、この $\frac{2}{3}$ 漸減比を「連続的に」しかも「簡単に」作図することが可能かどうかをさぐってみたい。



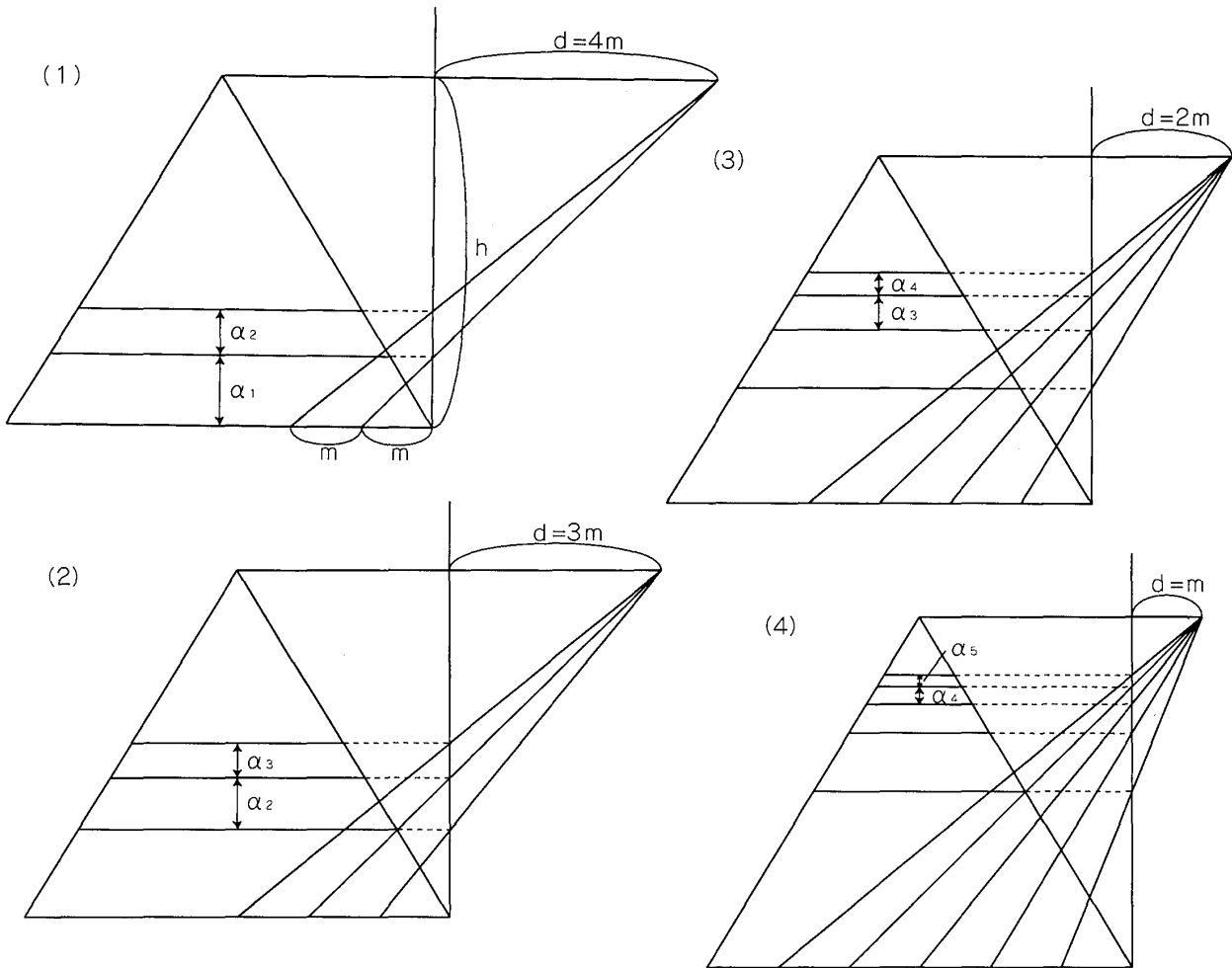
挿図21 アルベルティの $\frac{2}{3}$ 漸減図

$$[\alpha_2 = \frac{2}{3} \alpha_1, \alpha_n = (\frac{2}{3}) \alpha_{n-1} = (\frac{2}{3})^{n-1} \alpha_1]$$

2° アルベルティの遠近法または距離点法の場合

2-1° や 3-1° の式から明らかなように、これらの方法では漸減比が等比数列にならないので、原則的に「 $\frac{2}{3}$ 漸減図」はあり得ない。つまりこれらの通常の遠近法では「連続的に」 $\frac{2}{3}$ の比にすることはできないのである(Panofsky, 1940, p97の誤解に対する Wittkower, 1958, p280の批判も同じ問題である。/辻氏, 1996, p.57)。

しかしある特定の視距離の場合、そのなかの特定の隣り合う一組の横断線の幅の比が $\frac{2}{3}$ になることがある(連続的に存在するのではない)。それも挿図22のような4通りのみ存在する特殊な例である。[以下の4通りについてはすでに1978年の美術史学会例会の発表で指摘した]



挿図22 通常の線遠近法において漸減比が $\frac{2}{3}$ となる特殊な例

$$\left(\begin{array}{ll} (1) \quad d = 4 \text{ m のとき } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{3} & (3) \quad d = 2 \text{ m のとき } \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{2}{3} \\ (2) \quad d = 3 \text{ m のとき } \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{2}{3} & (4) \quad d = m \text{ のとき } \frac{\alpha_5}{\alpha_4} = \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

【証明】 2-1° の式から

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{d + (n-2)m}{d + nm} = \frac{2}{3} \quad \therefore (6-n)m = d \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

n は 2 以上の自然数であり、①を満たす組み合わせは次の場合に限られる。

- (1) n = 2 のとき d = 4 m, この時 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{3}$
- (2) n = 3 のとき d = 3 m, // $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{2}{3}$
- (3) n = 4 のとき d = 2 m, // $\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{2}{3}$
- (4) n = 5 のとき d = m, // $\frac{\alpha_5}{\alpha_4} = \frac{2}{3}$

(検算)

図(1)より $\alpha_1 : h = m : 5m \quad \alpha_1 = \frac{h}{5}$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) : h = 2 \text{ m} : 6 \text{ m} \quad \therefore \alpha_2 = \frac{h}{3} - \alpha_1 = \frac{h}{3} - \frac{h}{5} = \frac{2}{15} h$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{15} h \div \frac{h}{5} = \frac{2}{3}$$

図(2)より $\alpha_1 : h = m : 4 \text{ m} \quad \alpha_1 = \frac{h}{4}$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) : h = 2 \text{ m} : 5 \text{ m} \quad \therefore \alpha_2 = \frac{2}{5} h - \alpha_1 = \frac{2}{5} h - \frac{h}{4} = \frac{3}{20} h$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) : h = 3 \text{ m} : 6 \text{ m} \quad \therefore \alpha_3 = \frac{h}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} - \frac{3}{20} h = \frac{h}{10}$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{h}{10} \div \frac{3}{20} h = \frac{2}{3}$$

(3), (4)についても同じように求めることができる

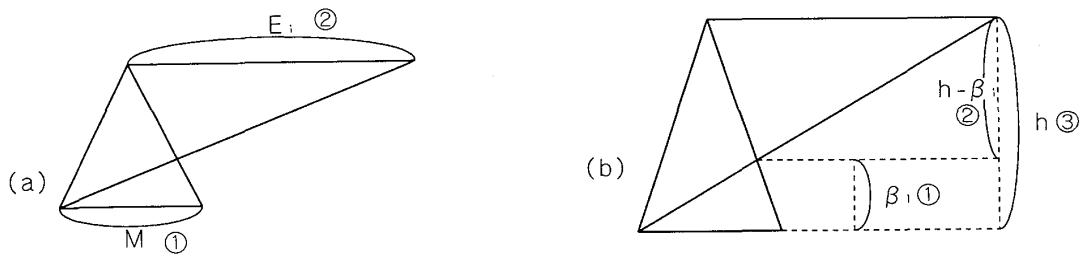
(注)この場合、漸減値が「連続的」に同じ比になるのではない。例えば(2)の場合

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{2}{3} \text{ であっても } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{3}{20} h \div \frac{h}{4} = \frac{3}{5} \text{ となり, } \frac{\alpha_4}{\alpha_3}, \frac{\alpha_5}{\alpha_4} \dots \text{ も同じく } \frac{2}{3} \text{ とはならない。}$$

つまり、平行対角線遠近法の場合 $(\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \dots = \frac{2}{3})$ のように連続的に $\frac{2}{3}$ となるのではなく、特定の視距離の場合にある箇所だけ(例えば $d = 2 \text{ m}$ のとき $\frac{\alpha_4}{\alpha_3}$ だけ) $\frac{2}{3}$ となる。したがって通常の遠近法(アルベルティの方法、および距離点法)では $\frac{2}{3}$ 漸減比の図を連続的に作図することはできない。

3° 平行対角線遠近法の場合

$\frac{2}{3}$ 漸減比は平行対角線遠近法を用いるならば、ごく簡単に作図することができる。結論をさきに述べるならば、「視距離が区画の2倍」あるいは「最初の漸減値が視高の $\frac{1}{3}$ 」でありさえすればよいのである(挿図23a, b)。



挿図23a, b 平行対角線遠近法における $\frac{2}{3}$ 漸減図の作図条件

$$[M : E_1 = 1 : 2 \text{ または } \beta_1 : h = 1 : 3]$$

[証明]

平行対角線遠近法で漸減比が $\frac{2}{3}$ となるのは $5 - 2^\circ$ の式から

$$\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} = \frac{E_1}{E_1 + M} = 1 - \frac{\beta_1}{h} = \frac{2}{3}$$

の時であるから、 $\frac{E_1}{E_1 + M} = \frac{2}{3}$ または $1 - \frac{\beta_1}{h} = \frac{2}{3}$ である。よって

$$E_1 = 2M \quad (\text{視距離 } E_1 \text{ が区画 } M \text{ の } 2 \text{ 倍, 挿図 } 23a) \dots\dots [1]$$

または

$$h = 3\beta_1 \quad (\text{視高 } h \text{ が最初の漸減値 } \beta_1 \text{ の } 3 \text{ 倍, 挿図 } 23b) \dots\dots [2]$$

であればよい。[2] は

$$(h - \beta_1) : \beta_1 = 2 : 1 \dots\dots [3]$$

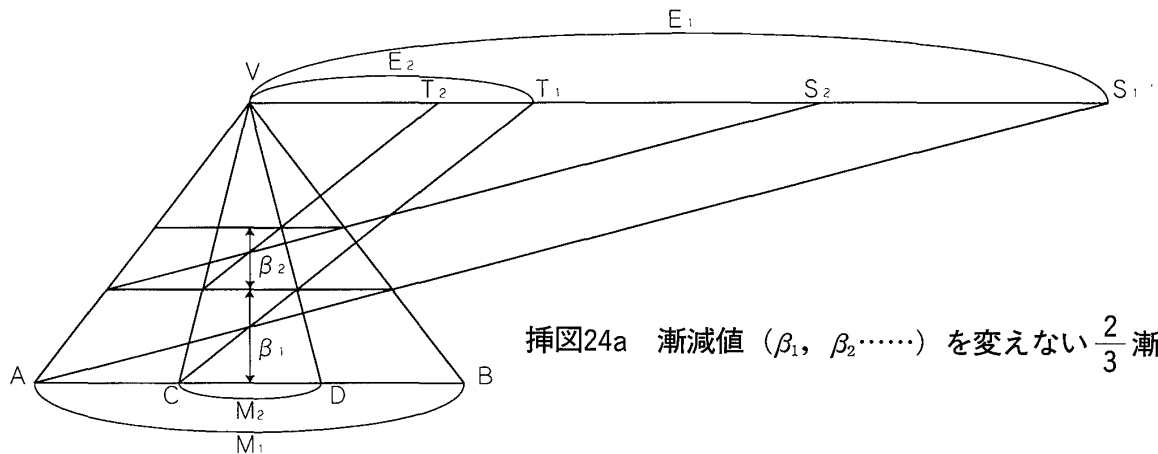
と考えてもよい(挿図23b)。

従って上の [1] [2] [3] のいずれかの条件に適った作図ならば、 $\frac{2}{3}$ 漸減比の図は無数につくれることになる。

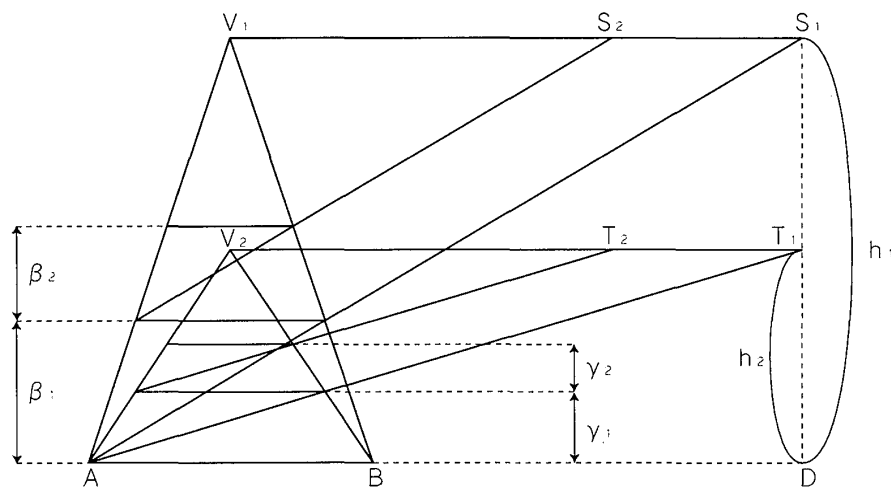
平行対角線遠近法による $\frac{2}{3}$ 漸減図のさまざまな例として、挿図24a, b を見てみる。

挿図24a において、 $E_1 = 2M_1$ あるいは $E_2 = 2M_2$ ならば、ともに $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{3}$ となる。

これは漸減値 ($\beta_1, \beta_2 \dots$) を変えずに区画と視距離を変化させながら ($M_1 \rightarrow M_2, E_1 \rightarrow E_2$)、一定の漸減比 ($\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \dots = \frac{2}{3}$) を作図する方法である。挿図24b においては、 $h_1 = 3\beta_1$ ならば $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{3}$ となり、また $h_2 = 3\gamma_1$ ならば $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{2}{3}$ となる。これは漸減値と視高をいろいろ変えながら ($\beta_1, \beta_2 \dots \rightarrow \gamma_1, \gamma_2 \dots, h_1 \rightarrow h_2$) 一定の漸減比 ($\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \dots = \frac{2}{3}$) を作図する方法である。

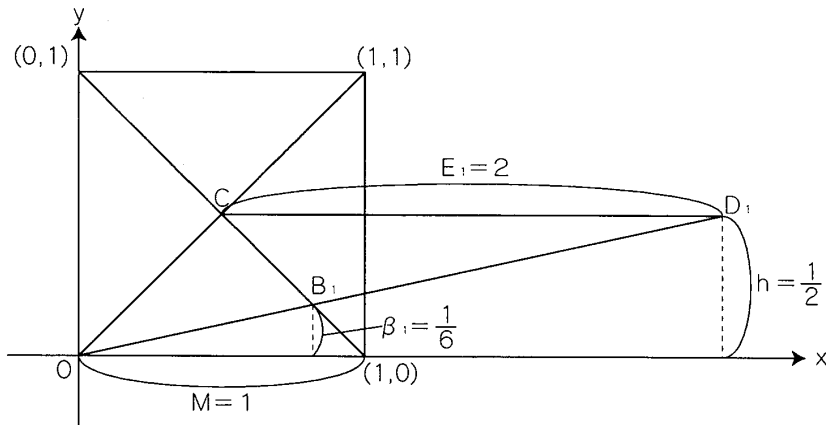


挿図24a 漸減値 ($\beta_1, \beta_2 \dots$) を変えない $\frac{2}{3}$ 漸減図



挿図24b 漸減値を変える ($\beta_1, \beta_2 \dots \rightarrow \gamma_1, \gamma_2 \dots$) $\frac{2}{3}$ 漸減図

(注1) 片桐氏(1992, P17, 図9)が, $\frac{2}{3}$ 漸減比の例として示した図は, $5-2^\circ$ の式で, $M=1, E_1=2$ あるいは $\beta_1 = \frac{1}{6}, h = \frac{1}{2}$ という条件を与えた場合の「特殊解」と考えることができる(挿図25参照)。



挿図25 $\frac{2}{3}$ 漸減図の一例 (片桐氏, 1992)

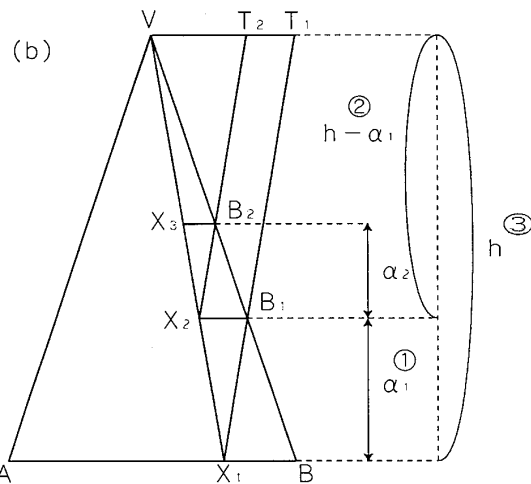
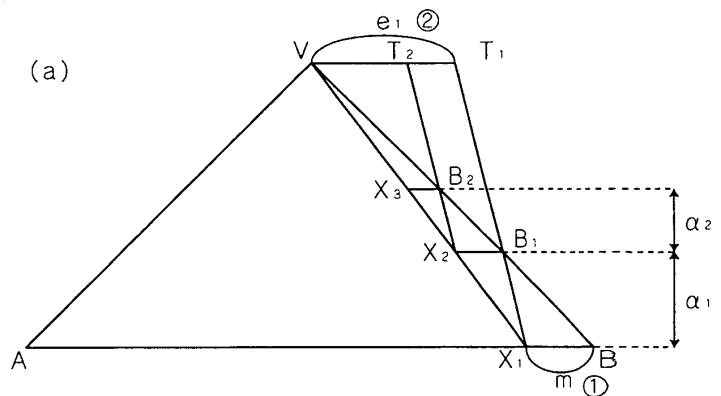
(注2) これまでは比較的大きな区画Mと長い視距離 E_1 で考えてきたが次に小さな区画mと短かな視距離 e_1 の場合で $\frac{2}{3}$ 漸減図を作図する方法を考えてみる。

挿図23aの代わりに挿図26aを, または挿図23bの代わりに挿図26bの場合を考えればよく, 作図法は基本的に同じである。

挿図26aにおいては, e_1 をmの2倍, つまり $e_1 = 2m$ として作図すれば漸減比 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{3}$ となる。

挿図26bにおいては, hを α_1 の3倍つまり $h = 3\alpha_1$ として作図すれば漸減比 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{3}$ となる。

なお $\alpha_1 : (h - \alpha_1) = 1 : 2$ として作図しても同じ漸減比 $\frac{2}{3}$ が得られる(挿図26b)。つまり $\alpha_1 : (h - \alpha_1) : h = 1 : 2 : 3$ である。



挿図26a, b 小区画による $\frac{2}{3}$ 漸減図

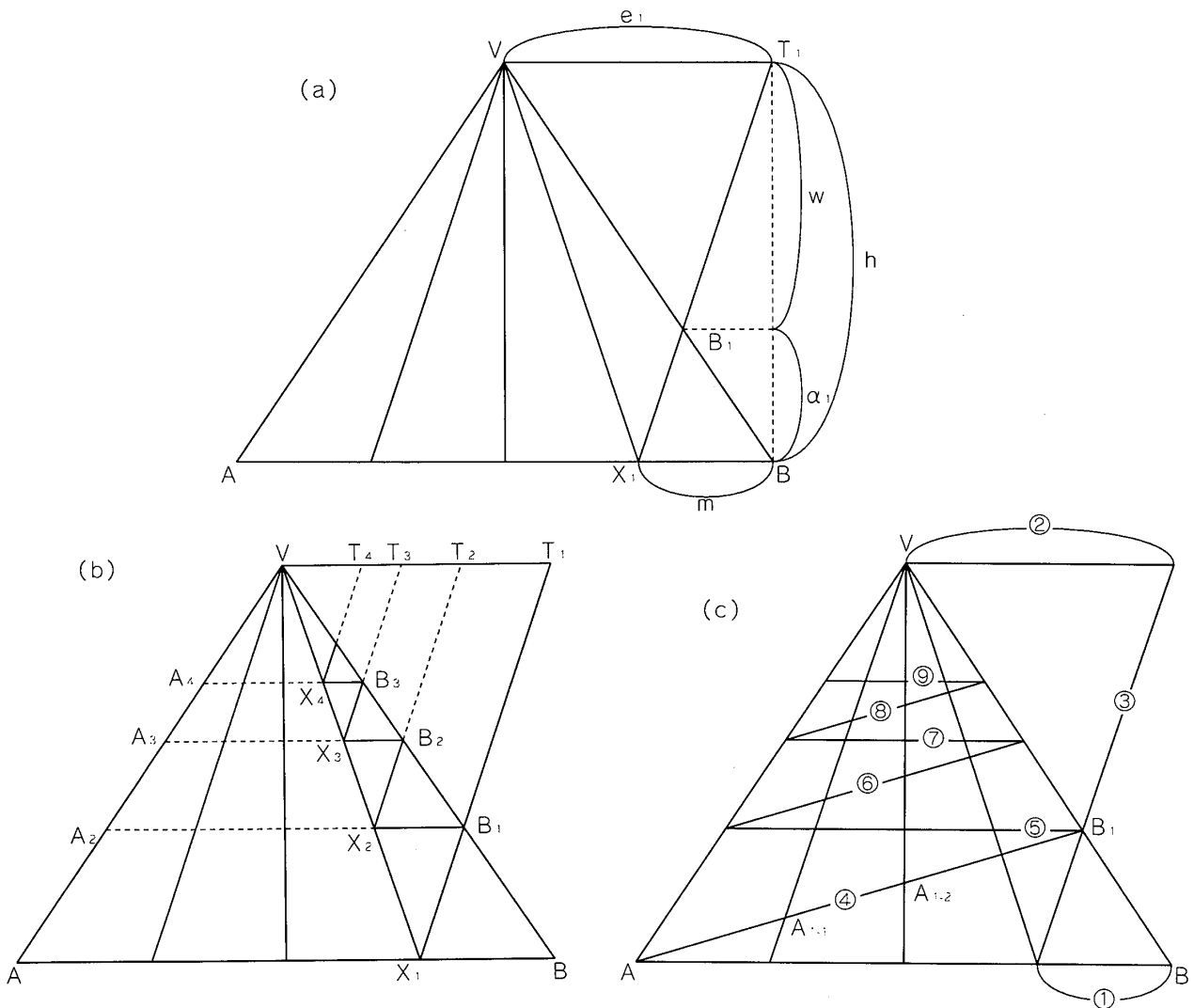
たとえば挿図24bのように視距離が長い場合には、作図すべき図形の右側に余分なスペースを必要とする。これは空間的に制約の多い壁画などの場合には極めて不都合な条件となる。

ここでは限られた画面内で、しかもできるだけ簡単なやり方で、標準的な大きさの区画の $\frac{2}{3}$ 漸減図を作図する方法を考えてみたい(挿図27a, b, c)。

まず挿図27aのように、 $e_1 = 2m$ または $h = 3\alpha_1$ 、または $w = 2\alpha_1$ のいずれかを満たすように点 B_1 を決める。

次に挿図27bのように B_1 から AB に平行な横断線 A_2B_1 を引く。さらに X_2 から X_1B_1 に平行な直線 X_2B_2 を引く、 B_2 から A_3B_2 を引く。このようにしてジグザグ模様に平行線を引いてゆけば求める $\frac{2}{3}$ 漸減比の格子状の舗床ができあがる。

また挿図27cのように長短の視距離を複合させた方法(①→②……⑨……の順)で作図することもできる。[ただし、対角線④、⑥、⑧……と直交線との交点(A_{1-1} , A_{1-2} など)を通る横断線がつくる漸減比は $\frac{2}{3}$ とはならないことに注意]



挿図27a, b, c $\frac{2}{3}$ 漸減図の作図法

4° レオナルドの素描と $\frac{2}{3}$ 漸減比

ここでは7節でふれたレオナルドの素描をモデルとして、その一部を変えながらさまざまに $\frac{2}{3}$ 漸減図を作図してみる。

(1) まず消失点Vの位置や区画mの大きさを変えずに $\frac{2}{3}$ 漸減図を作図してみる(挿図28a)。

つまり視高hと区画mはそのまま視距離 e_1 と最初の漸減値 β_1 が変わる。視距離 $V T_1 = 2m$ (または $V S_1 = 2AB = 24m$ でも良い)として、対角線 $X_1 T_1$ (または対角線 $A S_1$)を引くと、直交線VBとの交点 B_1 が求められる。ABと平行に $A_2 B_1$ を引けば最初の漸減値 β_1 がわかる。

以下は順次 $X_2 T_2$ (または $A_2 S_2$)、 $B_2 A_3$ 、 $X_3 T_3$ (または $A_3 S_3$)……と引いてゆけば2つめ以降の漸減値 β_2 、 β_3 が求められる。

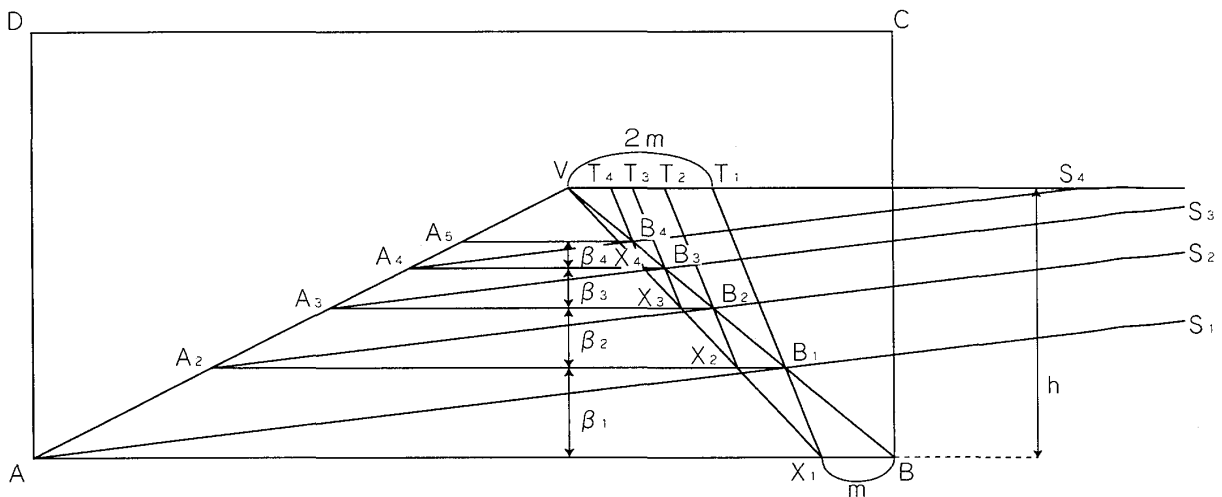
点 β_1 の位置は、

$$\beta_1 = \frac{h}{3} = 3 \frac{3}{4} \div 3 = \frac{5}{4}$$

ところで β_1 、 β_2 ……は公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、4番目の漸減値 β_4 までの和は

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \frac{\frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right\}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{325}{108} \doteq 3.009$$

したがって点 B_4 は画面ABCDの下半分よりもほんのわずか上方にある。



挿図28a

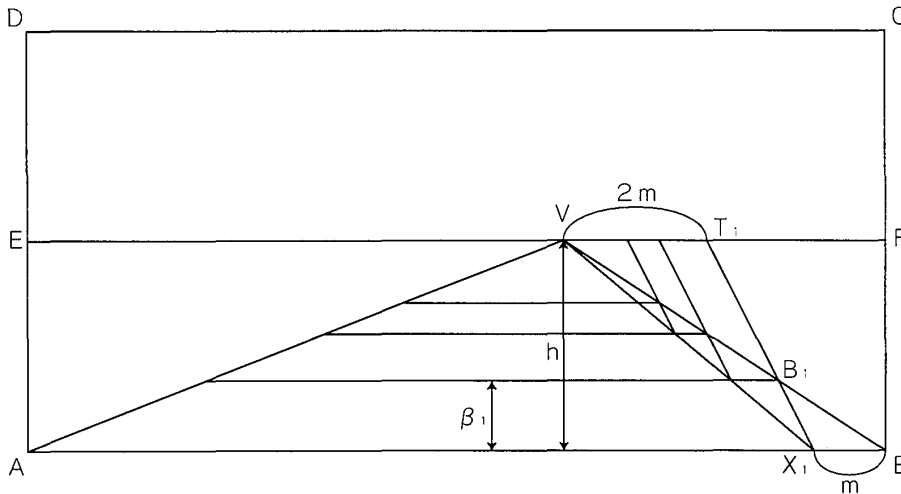
(2) 区画mの大きさを変えずに5つの層($\beta_1 \sim \beta_5$)が画面下半分に収まり、かつ $\frac{2}{3}$ 漸減比となるような β_1 とhを求めてみる。5つの層の和が3以下であればよいから

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = \frac{\beta_1 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\beta_1 \frac{211}{243} \leq 3$$

$$\therefore \beta_1 \leq \frac{243}{211} \approx 1.15$$

したがってほぼ β_1 を 1.15m, h を $3\beta_1 = 3.45\text{m}$ にすればよい。

- (3) 次に消失点 V が画面の高さの中央にある時, つまり $h = 3\text{m}$ の時に $\frac{2}{3}$ 漸減比で作図してみる (挿図28b)。

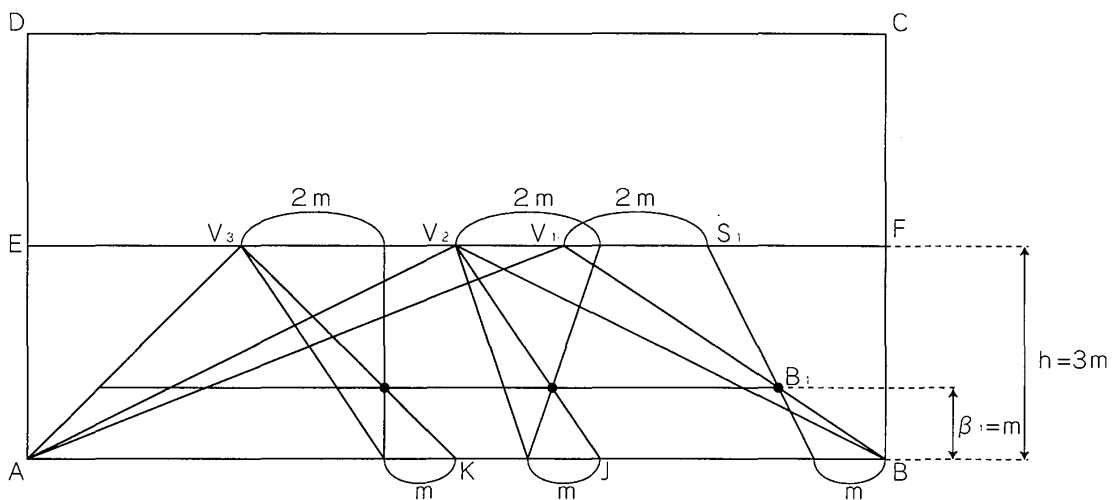


挿図28b

$VT_1 = 2 \times_1 B = 2\text{m}$ または $\beta_1 = \frac{h}{3} = \text{m}$ となるように点 B_1 をとればよい。

この時 B_1 の高さ (β_1 の値) についてのみ考えるならば, レオナルドの素描と全く同じ値になる。

また挿図28cのように $\triangle ABV_1$ の消失点を水平方向に移したり ($\triangle ABV_2$), ピラミッドの底辺 (区画数) を変えても ($\triangle AJV_2$), 漸減値や漸減比は一定である。また $\triangle AKV_3$ のように, きわめて標準的な形での $\beta_1 = \text{m}$, $\frac{2}{3}$ 漸減比のピラミッドも可能となる。



挿図28c

結 び

9. ゴシックの平行対角線遠近法, アルベルティの $\frac{2}{3}$ 漸減比, レオナルドの素描

1° ここで再度アルベルティの言及している $\frac{2}{3}$ 漸減比がどのような作図法なのかを考えてみよう。常識的には8-1°でも述べたように、定規や目分量で横断線間の幅を順次 $\frac{2}{3}$ ずつ計測していくだけの単純な方法と思われる。しかし少しでも正確に作図しようとする、次の横断線を引くために常にひとつ前の間隔を3で割らなければならない、ほとんどの場合に端数ができてしまう。これは実際問題としてはけっこう面倒な作業になる。

たとえば挿図29aのように第1層の幅を3の倍数で大きな数(たとえば81)とすれば、比較的容易に作図できるが(第2層は $81 \times \frac{2}{3} = 54$, 第3層は $54 \times \frac{2}{3} = 36$, 第4層は $36 \times \frac{2}{3} = 24$, 第5層は $24 \times \frac{2}{3} = 16$, ただし第6層は $16 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$ となり、以後は分数となってしまふ), この方法では大きさのさまざまな画面に適切に対処できるとは限らない。[なお消失点Vを挿図29bのように高さ243の位置に定めない限り、平行対角線遠近法とはならない。つまり図aではその対角線は平行ではない。]これに対して平行対角線を用いるならば、いかなる大きさの画面でもきわめて容易に $\frac{2}{3}$ 漸減比を作図できることは8-3°で述べた(挿図29bの場合 $V T_1 = 2 \times B = 2m$ として点 x_1 と T_1 を結び交点 B_1 を求めればよい)。

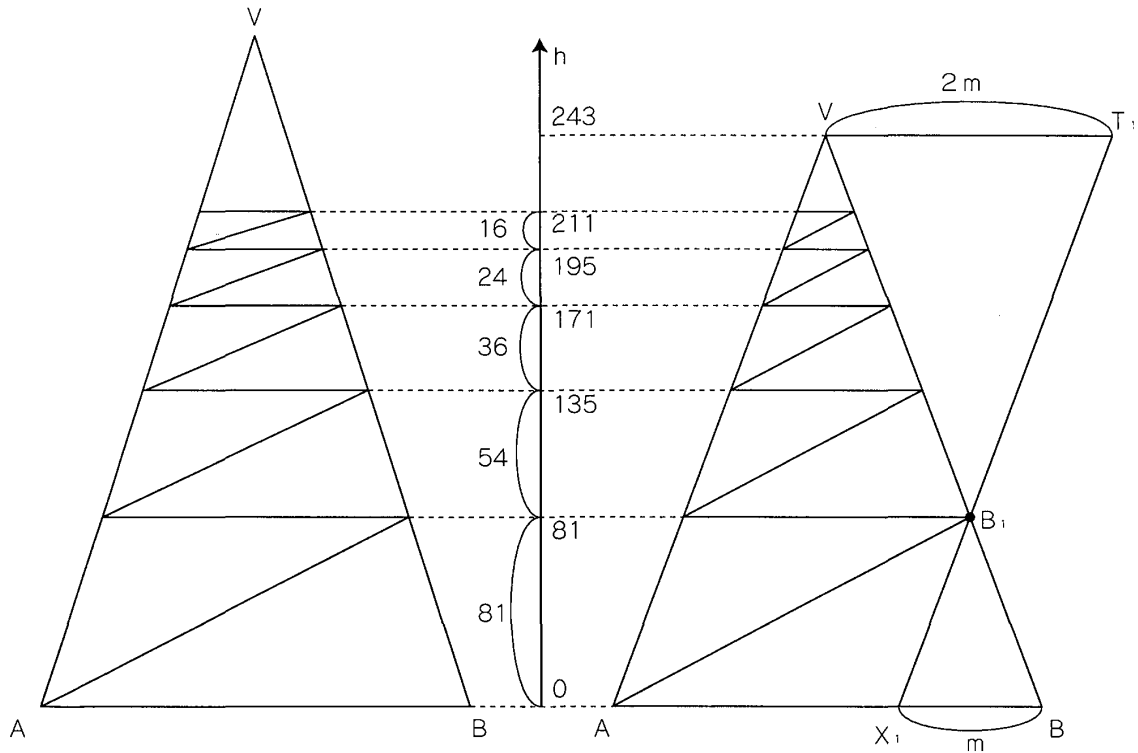
しかもアンブロジーオ・ロレンツェティの《聖告》のような作品が平行対角線遠近法を適用できることになると(5-5°でふれたように漸減比は $\frac{7}{8}$ である), $\frac{2}{3}$ の漸減比の平行対角線遠近法で描かれた作品が実際に存在するかもしれず、アルベルティの言及している $\frac{2}{3}$ 漸減比が平行対角線遠近法である可能性はまだ残されていると言えよう。

2° さらにレオナルド・ダ・ヴィンチの素描で用いられている遠近法の歴史的な位置づけを考えてみたい。レオナルドの素描の5つの層が「等比数列」であるという点はアルベルティの $\frac{2}{3}$ 漸減比と共通しており(片桐氏,1992,p.18), また素描の漸減比 $\frac{11}{15}$ が、アルベルティのいう漸減比 $\frac{2}{3}$ ($=\frac{10}{15}$)にかなり近いのも単なる偶然ではないかもしれない。また平行対角線遠近法を適用できる14世紀の作品があることは、レオナルドの素描と中世ゴシックの作図方法とのつながりがかなり浮上してきたことになるろう。

しかし素描の各層内の横断線は距離点法による作図と同じであり(辻氏,1995,p.50.のいう「距離点法の源流としての対角線法」), $\frac{2}{3}$ のみならずいかなる等比数列の漸減比も「連続的」にはつくり出すことができない。この点は忘れてならない重要な事実であり、アルベルティの $\frac{2}{3}$ 漸減比図やゴシックの平行対角線遠近法の単純な適用とすることはできない。

確かにこの「複合的な作図法」には、「遠近法の歴史的展開がすべて一枚の素描に凝縮さ

れているかのようなものである」(片桐氏,1992,p.19)。あらゆることを試みようとしたレオナルドの実験的な精神にまことにふさわしい素描といえよう。



挿図29a 単純な $\frac{2}{3}$ 漸減図

(対角線は平行でない)

挿図29b 平行対角線遠近法による $\frac{2}{3}$ 漸減図

(対角線は平行である)

〔参考文献〕

- Alberti/Grayson(1975): Leon Battista Alberti, *De pictura*, (Reprint a cura di Cecil Grayson) Bari, 1975. [アルベルティ『絵画論』三輪福松訳, 中央公論美術出版 昭和46年]
- Barre/Flocon/Hansen(1968;1987): André Barre et Albert Flocon, *La perspective curviligne*, Paris(Flammarion), 1968. [*Curvilinear Perspective*, (With an introductory essay by A. Flocon. Translation and commentary by Robert Hansen), Berkley (University of California Press), 1987]
- 片桐頼継「レオナルドの《三博士礼拝背景素描》—その作図法の性質について—」『武蔵野美術大学研究紀要』No23,1992,p.13-19
- Panofsky(1940): Erwin Panofsky, *The Codex Huygens and Leonardo da Vinci's Art Theory* (Studies of the Warburg Institute, XIII), London,1940
- Panofsky(1960): Erwin Panofsky, *Renaissance and Renaissances in Western Art*, Stockholm,1960. [Icon Editions, New York, 1972] [パノフスキー『ルネサンスの春』中森義宗, 清水忠訳, 思索社 昭和48年]
- 篠塚二三男「線遠近法における〈距離の定式〉: 数式計算に基づく空間の再構成」早稲田大学大

- 学院文学研究科『文学研究科紀要 別冊第九集』1982.p.111-127
- 篠塚二三男「レオナルド・ダ・ヴィンチの素描《マギの礼拝背景図》の空間構成—その遠近法と数理的秩序の解明—」別府大学文学部美学美術史学科『芸術学論叢』No.10,1991,p.1-57
- 裾分一弘「レオナルドを読む—比例論のある系譜について—」『世界』1975年7月号 p.248-254
- 裾分一弘『イタリア・ルネサンスの芸術論研究』中央公論美術出版 昭和61年(1986)
- 辻茂『遠近法の誕生：ルネサンスの芸術家の科学』朝日新聞社 1995
- 辻茂『遠近法の発見』現代企画室 1996
- Veltman(1986): Kim H. Veltman, *Studies on Leonardo da Vinci I, Linear Perspective and the Visual Dimensions of Science and Art*, München, 1986
- Wittkower(1953): Rudolf Wittkower, “Brunelleschi and ‘Proportion in Perspective’”, *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 1953,p.275-291